Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
3 ottobre 2004

1 Definizione di gruppo

1. Determinare quali dei sistemi $(G, *)$ qui descritti sono gruppi. In caso negativo dire quali degli assiomi di gruppo non sono verificati.
   - $G = \mathbb{Z}$ con $a * b = a - b$
   - $G = \mathbb{N}$ con $a * b = ab$
   - G = insieme dei numeri razionali con denominatore dispari, $a*b = a + b$
   - $G = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ con
     - $a_i * a_j = a_{i+j}$ se $i + j < 7$
     - $a_i * a_j = a_{i+j-7}$ se $i + j \geq 7$.
2. Se G è un gruppo nel quale $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni $a, b \in G$ allora G è abeliano.
3. Se G è un gruppo nel quale $(ab)^i = a^ib^i$ per tre interi i consecutivi e per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano.
4. Se G è un gruppo finito, dimostrare che esiste un intero N tale che $a^N = e$.
5. Se G è un guppo di ordine pari, dimostrare che in G esiste un elemento $a \neq e$ tale che $a^2 = e$.
6. Sia G un insieme non vuoto, chiuso rispetto a un prodotto che sia associativo e che soddisfi inoltre le seguenti condizioni:
   (a) Esiste un elemento e tale che $a * e = a$ per ogni $a \in G$
   (b) Dato $a \in G$ esiste un elemento $y(a) \in G$ tale che $a * y(a) = e$

   Dimostrare allora che G è un gruppo rispetto a questo prodotto.
7. Supponiamo che G sia un insieme finito chiuso rispetto ad un prodotto associativo, e che valgano entrambe le leggi di cancellazione. Dimostrare che G è un gruppo.
8. Usando il risultato dell'esercizio 7 dimostrare che:

(a) gli interi modulo p primo, diversi da 0, sono un gruppo rispetto alla moltiplicazione modulo p

(b) gli interi coprimi con n sono un gruppo rispetto alla moltiplicazione modulo n.

9. Si provi che un gruppo non abeliano non è mai ciclico.

2 Sottogruppi

1. Quali sono le condizioni perché un sottoinsieme di un gruppo sia un sottogruppo.

2. Se H e K sono sottogruppi di G allora HK è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$.

3. Siano H e K due sottogruppi finiti di G, sia $|HK|$ la cardinalità di HK come insieme allora

$$|HK| = \frac{Ord(H)Ord(K)}{Ord(H \bigcap K)}. \tag{1}$$

4. Sia H un sottogruppo di G, sia $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$, dimostrare che aHa^{-1} è un sottogruppo di G. Se G è finito calcolare $Ord(aHa^{-1})$.

5. Scrivere esplicitamente le classi laterali destre di H in G dove:

   (a) $G = (a)$ è un gruppo ciclico di ordine 10 e $H = (a^2)$

   (b) G come sopra e $H = (a^5)$.

6. Sia $a \in G$, definiamo $C(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. Dimostrare che C(a) è un sottogruppo di G. C(a) si chiama il centralizzante di a in G.

7. Sia H un sottogruppo di G, definiamo $C(H) = \{x \in G : xh = hx \, \forall h \in H\}$. Dimostrare che C(H) è un sottogruppo di G.

8. Sia H un sottogruppo di G, definiamo $N(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$. Dimostrare che N(H) è un sottogruppo di G e che $N(H) \supseteq H$.

3 Gruppo Simmetrico

1. Calcolare tutti i sottogruppi di S_3.

2. Determinare le orbite e i cicli delle seguenti permutazioni:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

3. Scrivere le permutazioni del problema 2 come prodotto di cicli disgiunti.

4. Dimostrare che il più piccolo sottogruppo di S_n che contiene (1 2) e (1 2 ... n) è S_n.