Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
21 Novembre 2004

1 Definizione di Anello

1. *Binomio* Sia R un anello. Siano a e $b \in R$, allora:
   (a) Dimostrare che $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$.
   (b) Trovare la forma del teorema del binomio in R; trovare cioè un'espressione per $(a+b)^n$, con n intero positivo.

2. Sia $R = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$. Dimostrare che R è un sottoanello unitario di $M_n(\mathbb{R})$.

3. Sia $R = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i \leq j\}$. Dimostrare che R è un sottoanello di $M_n(\mathbb{R})$. R è unitario ?

4. Sia $R = \{A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i = 2 \text{ o } j = 2\}$. Dimostrare che R è un sottoanello di $M_3(\mathbb{R})$. R è unitario ?

5. Sia $R = \left\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{Q} \text{ e } a_n \text{ quasi tutti nulli}\right\}$. Per ogni a e $b \in R$ definiamo
   - $a + b = (a_n + b_n)_{n\in N}$
   - $a \cdot b = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Verificare se R è un anello.

2 Ideali

1. Sia R un anello, I un ideale di R e $1 \in I$ allora $I = R$

2. Sia R un anello commutativo e $a \in R$
   (a) dimostrare che $aR = \{ar : r \in R\}$ è un ideale bilatero di R.
   (b) dimostrare con un esempio che ciò può non essere vero se R non è commutativo.

3. Dimostrare che tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $n\mathbb{Z}$.

4. Dimostrare che $n\mathbb{Z}$ è un ideale primo se e solo se n è primo o $n = 0$.

5. Sia I un ideale di $\mathbb{Z}$ non nullo. Dimostrare che I è primo $\Leftrightarrow$ I è massimale.

6. *Teorema Cinese dei resti* Siano $I_1, \cdots, I_n$ ideali di R, anello commutativo con identità, tali che $I_i + I_j = R$ per ogni $i \neq j$. Siano $x_1, \cdots, x_n \in R$, allora esiste $x \in R$ tale che $x \equiv x_i \mod I_i$. Verificare che per $R = \mathbb{Z}$ si ottiene l'usuale teorema cinese dei resti.

7. Consideriamo

   (a) $\mathbb{Z}_{30}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\right\} \subset \mathbb{Z}_{30}$.

   (b) $\mathbb{Z}_{20}$ e $R = \left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}\right\} \subset \mathbb{Z}_{20}$.

   Verificare, in entrambi i casi, se R è un sottoanello, ha divisori dello zero, ed è un campo. Trovare un anello ad esso isomorfo.