Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Esercizi
17 Dicembre 2004

1 Campi

1. Dato F campo e K ampliamento di F, dimostrare che l'unità di K e la stessa di F.
2. Sia K un campo di caratteristica p, trovare il sottocampo fondamentale di K.
3. Sia F un campo, e sia $g \in F[x]$ di grado n, poniamo $I = (g)$ l'ideale generato da g. Dimostrare che $F[x]/I$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su F.

2 Numeri algebrici e trascendenti

1. *[1] Dimostrare che π è trascendente su $\mathbb{Q}$
2. *Dimostrare che e è trascendente su $\mathbb{Q}$.
3. Dimostrare che $e^{\frac{m}{n}}$ è trascendente su $\mathbb{Q}$ per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$.
4. Dimostrare che $\sin(1°)$ è un numero algebrico, dove $1° = \frac{2\pi}{360}$.
5. In generale dimostrare che $\sin(m°)$ è un numero algebrico per ogni intero m.
6. Consideriamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
   (a) Dimostrare che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$.
   (b) Trovare un polinomio di grado 4 su $\mathbb{Q}$ annulato da $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
   (c) Qual'è il grado su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Dimostrarlo.
   (d) Qual'è il grado di $\sqrt{2}\sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$.

3 Campi di spezzamento

1. Sia $F = \mathbb{Q}$. Determinare il grado dei campi di spezzamento dei seguenti polinomi su $\mathbb{Q}$.
   (a) $x^4 + 1$,

[1] L' * indica gli esercizi difficili

(b) $x^4 - 2$,

(c) $x^6 + 1$,

(d) $x^5 - 1$,

(e) $x^6 + x^3 + 1$.

2. Sia p un numero primo, dimostrare che il campo di spezzamento di $x^p - 1$ su $\mathbb{Q}$, ha grado $p - 1$.

3. Sia E un ampliamento di F, $f \in F[x]$ e ϕ un automorfismo di E che fissa ogni elemento di di F, cioè $\forall a \in F$, $\phi(a) = a$, dimostrare che ϕ deve portare una radice di f appartenente ad E in una radice di f in E.

4. Dimostrare che $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ non ha automorfismi tranne l'identità.

5. Utilizando il risultato dell'esercizio 3, dimostrare che se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $p \in \mathbb{R}[x]$, allora $\overline{\alpha}$ è una radice di p

4 Campi finiti

1. Sia F un campo con un numero finito q di elementi

   (a) Dimostrare che esiste un numero primo p tale che

   $$pa = \underbrace{a + \cdots + a}_{p-volte} = 0$$

   per ogni $a \in F$.

   (b) Dimostrare che $q = p^n$ per un certo intero n.

   (c) Se $a \in F$, dimostarere che $a^q = a$.

   (d) Se $b \in K$ è algebrico su F, dimostrare che $b^{q^m} = b$ per qualche intero $m > 0$.

2. Sia F un campo con p^n elementi, provare che esiste un polinomio q in $\mathbb{Z}_p[x]$ tale che $F \cong \mathbb{Z}_p[x] / (q)$.

3. Costruire un campo, se possibile, con le seguenti cardinalità: 3, 6, 27, 32, 144, 256, 3125.