Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AL2 - Algebra 2, gruppi anelli e campi
Soluzioni
17 ottobre 2004

1 Sottogruppi normali.

1. *Lemma della farfalla* Siano U e V due sottogruppi di un gruppo G, siano H e K sottogruppi normali di U e V, rispettivamente. Allora

   (a) $H(U \cap K)$ è normale in $H(U \cap V)$

   (b) $(H \cap V)K$ è normale in $(U \cap V)K$

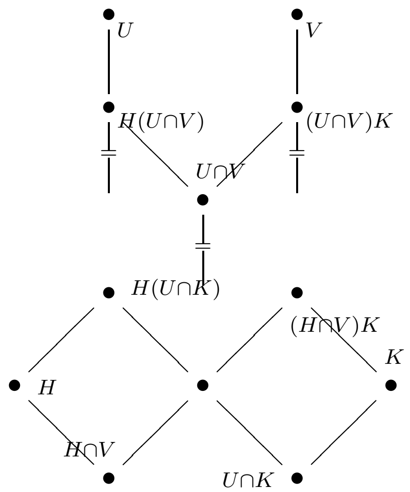
   e i gruppi quozienti sono isomorfi, i.e.

$$H(U \cap V)/H(U \cap K) \cong (U \cap V)K/(H \cap V)K.$$

Soluzione 1.1. *Verifichiamo che $H(U \cap K)$ è normale in $H(U \cap V)$. Osserviamo che $U \cap K$ è normale in $U \cap V$, infatti per ogni $k \in U \cap K$ e per ogni $v \in U \cap V$ si ha:*

$$\begin{aligned} vkv^{-1} &\in K \text{ perchè } K \text{ è normale in } V \\ vkv^{-1} &\in U \text{ perchè } k \text{ e } v \in U \\ \Rightarrow vkv^{-1} &\in U \cap K \end{aligned}$$

poiché ogni gruppo è normale in se abbiamo che $H(U \cap K)$ è normale in $H(U \cap V)$. La dimostrazione dell'altra affermazione è analoga. La combinazione di gruppi e gruppi quoziente diventa chiara quando la visualizziamo nel diagramma di sottogruppi seguente (che dà il nome al lemma):



Nel diagramma sono dati H, K, U e V, tutti gli altri punti del diagramma corrispondono a certi gruppi che si possono determinare nel modo seguente:

- *L'intersezione di due segmenti che vanno verso il basso corrispondono all'intersezione di gruppi*
- *L'intersezione di due linee che vanno verso l'alto corrisponde al prodotto*

Consideriamo i due parallelogrammi che formano le ali della farfalla, otteniamo l'isomorfismo dei gruppi quoziente come segue:

$$\frac{H(U\cap V)}{H(U\cap K)} \cong \frac{U\cap V}{(H\cap V)(U\cap K)} \cong \frac{(U\cap V)K}{(H\cap V)K}$$

In fatti il latto in comune ai due parallelogrammi ha come punto iniziale $U\cap V$, e come punto finale $(H\cap V)(U\cap K)$. Abbiamo l'isomorfismo

$$\frac{H(U\cap V)}{H(U\cap K)} \cong \frac{U\cap V}{(H\cap V)(U\cap K)}$$

applicando il teorema di isomorfismo*:*

$$G/(G\cap N) \cong GN/N$$

con $G = U\cap V$ e $N = H(U\cap K)$. Questo ci dà l'isomorfismo di sinistra. L'isomorfismo di destra si ottiene per simmetria.

2. *Sottogruppo derivato* Sia G un gruppo. Consideriamo $U = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$, il sottogruppo generato da U si chiama sottogruppo dei commutatori, o derivato, e si denota con G'. Dimostrare che:

   (a) G' è normale in G

   (b) G/G' è commutativo

   (c) Se G/N è commutativo allora $N \supset G'$

   (d) Se H è un sottogruppo di G e $H \supset G'$, allora H è normale in G.

Soluzione 1.2. *(a) Sia $g\in G$ e $h \in G'$*

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} \\ &= gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} \\ &= gxg^{-1}gyg^{-1}(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1} \in G \end{aligned}$$

(b) Sappiamo che per ogni g, $h \in G$ $ghg^{-1}h^{-1} \in G'$, dunque $\overline{ghg^{-1}h^{-1}} = \overline{e}$, dunque $\overline{gh} = \overline{hg}$.

(c) *G/N commutativo è equivalente a $ghg^{-1}h^{-1} \in N$ per ogni g, $h \in G$, dunque $G' \subset H$*

(d) *Ricordiamo che esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi normali di G e i sottogruppi normali di G/N per ogni N sottogruppo normale. Dal punto 2b sappiamo che G/G' è commutativo e per ipotesi H/G' è un sottogruppo non nullo di G/G', dunque H/G' è normale, segue che H è normale.*

2 Omomorfismi e sottogruppi normali.

1. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine m. Sia n primo con m. Dimostrare che ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = x^n$ con $x \in G$, i.e. esiste $x \in G$ tale che $x^n = g$.

   Soluzione 2.1. *Consideriamo l'applicazione $\phi : G \mapsto G$ tale che $\phi(x) = x^n$, allora*

   $$\ker(\phi) = \{x \in G : x^n = e\} = \{e\}$$

   dunque ϕ è un isomorfismo, perché un'applicazione iniettiva fra insiemi finiti è suriettiva.

2. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}, +)$ definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che f_n è un omomorfismo, trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

   Soluzione 2.2.

   $$\ker(f_n) = \{0\}$$
   $$Im(f_n) = n\mathbb{Z}$$

3. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (\mathbb{Z}_m, +)$ definita da $f_n(x) = nx \mod m$.

   (a) Per quali n, f_n è un omomorfismo di gruppi.

   (b) Per tali n trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

   Soluzione 2.3. *(a) per tutti gli n.*

   (b) $\ker(f_n) = \frac{m}{d}\mathbb{Z}$ *con d massimo comun divisore fra m e n, e* $Im(f_n) \cong \mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

3 Gruppo Simmetrico.

1. Determinare i sottogruppi normali di S_3 e S_4.

   Soluzione 3.1. *I sottogruppi di S_3, usando il teorema di Lagrange, sono:*

(a) *Ordine 2:* $\langle id, p \rangle$ *con p trasposizione*

(b) *Ordine 3:* $\langle id, (123), (132) \rangle = A_3$

(c) *Ordine 4 e 5 non ci sono perché 4 e 5 non dividono 6.*

I sottogruppi di ordine 2 non sono normali perché due trasposizioni sono sempre coniugate (osserviamo che l'unico sottogruppo che contiene tutte le trasposizioni è S_3*). Percui i sottogruppi normali di* S_3 *sono* $\langle id \rangle$ *,* A_3 *e* S_3*. I sottogruppi di* S_4 *possono avere ordine 2, 3, 4, 6, 8 e 12. Il sottogruppo di ordine 12 è* A_4 *ed è normale perché ha indice 2. Come nel caso di* S_3 *i sottogruppi di ordine 2 e 3 non possono essere normali. Rimangano da verificare i sottogruppi di ordine 4, 6 e 8.*

2. Determinare il centro di S_3 e S_4.

   Soluzione 3.2. $Z(S_3) = \langle id \rangle$ *e* $Z(S_4) = \langle id \rangle$

3. Determinare il centralizzante di:

   (a) $\langle id, (12) \rangle$ in S_3

   (b) $\langle id, (12) \rangle$ in S_4

   (c) $\langle id, (12), (123) \rangle$ in S_4.

   Soluzione 3.3. *(a)* $C(\langle id, (12) \rangle) = \langle id, (12) \rangle$

   (b) $C(\langle id, (12) \rangle) = \langle id, (12), (34) \rangle$

   (c) $C(\langle id, (12), (123) \rangle) = \langle id \rangle$.

4. Determinare il normalizzante di:

   (a) $\langle id, (12) \rangle$ in S_3

   (b) $\langle id, (12) \rangle$ in S_4

   (c) $\langle id, (12), (123) \rangle$ in S_4.

   Soluzione 3.4. *(a)* $N(\langle id, (12) \rangle) = \langle id, (12) \rangle$

   (b) $N(\langle id, (12) \rangle) = \langle id, (12), (34) \rangle$

   (c) $N(\langle id, (12), (123) \rangle) = \langle id, (12), (123) \rangle$.

5. In S_5 trovare una permutazione per ogni struttura ciclica seguente:

   (a) (-)

   (b) (- -)(- -)

   (c) (- -)

   (d) (- -)(- - -)

   (e) (- - -)

(f) (- - - -)

(g) (- - - - -)

Soluzione 3.5. *(a) id*

(b) (12)(23)

(c) (12)

(d) (12)(123)

(e) (123)

(f) (1234)

(g) (12345)

6. Consideriamo una scatola quadrata piatta riempita con 16 quadrati piatti di metallo, numerati come nella figura seguente:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

L'ultimo quadrato viene rimosso, rendendo possibile lo spostamento degli altri quadrati facendoli scivolare. Si consideri una sequenza qualsiasi di spostamenti che termini con l'angolo destro inferiore libero. Dimostrare che le permutazioni possibili per tali spostamenti sono solamente le permutazioni pari in A_{15}. Esempio:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\longrightarrow$

3	6	7	8
9	2	1	4
5	10	13	14
12	11	15	

è una configurazione finale ammissibile.

Soluzione 3.6. *....*

4 Matrici.

1. Consideriamo l'applicazione determinante:

$$\det : (Gl_2(\mathbb{C}), *) \mapsto (\mathbb{C}^*, *)$$

provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata. Il nucleo si chiama $Sl_2(\mathbb{C})$.

Soluzione 4.1. *Sappiamo che* $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$, *dunque è un omomorfismo.* $Im(\det) = \mathbb{C}^*$, $\ker(\det) = \{A \in Gl_{\mathbb{C}} : ad - bc = 1\}$ *e la relazione di equivalenza generata è* $A \approx B \Leftrightarrow \det(A) = \det(B)$.

2. Consideriamo l'applicazione traccia:

$$tr : (M_2(\mathbb{C}), +) \mapsto (\mathbb{C}, +)$$

provare che è un omomorfismo di gruppi. Determinare il nucleo, l'immagine e scrivere la relazione di equivalenza generata.

Soluzione 4.2. *Sappiamo che* $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, *dunque è un omomorfismo.* $Im(tr) = \mathbb{C}$, $\ker(tr) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : a + d = 0\}$ *e la relazione di equivalenza generata è* $A \approx B \Leftrightarrow tr(A) = tr(B)$.