Meccanica Analitica

A.A. 2015/16 – esame scritto (25/01/2017)

Esercizio 1 [10 punti]

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla semiretta $(0, +\infty)$ sotto l'azione della forza

$$F(x) = -x^7 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8x^3}.$$

(a) Si trovi il potenziale e un integrale primo del moto.

(b) Si disegni il grafico del potenziale, si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

(c) Si faccia l'analisi qualitativa del moto: in particolare, si disegnino le curve di livello e le si orientino nel verso del moto; si determinino i dati iniziali che danno luogo a moti periodici e non periodici. Per i dati iniziali che danno luogo a un moto periodico, se ne calcoli il periodo (sotto forma di un integrale definito).

Esercizio 2 [10 punti]

Due punti materiali bidimensionali di masse $m > 0$ e $2m$ sono vincolati a muoversi su un piano verticale lungo due guide di equazione, rispettivamente, $y = x$ e $y = h$, con h una costante (qui y è la coordinata dell'asse verticale, orientato verso l'alto). In presenza di gravità, i due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il secondo punto è inoltre collegato ad un'altra molla fissata nell'origine di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

(a) Scegliendo le ascisse dei punti come coordinate generalizzate si scriva la Lagrangiana del sistema.

(b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.

(c) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si determinino le frequenze dei modi normali di oscillazione attorno ad esso.

Esercizio 3 [10 punti]

Si consideri l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = \log\left(\frac{2q}{p}\right),$$

con $q > 0$ e $p > 0$. Si consideri inoltre la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -\frac{1}{2}qp, \\ P = \log\left(\frac{2q}{p}\right). \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si scrivano le equazioni di Hamilton del sistema.

(b) Si dimostri che $\mathcal{H}$ è regolare e si trovi la Lagrangiana corrispondente; si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.

(c) Si dimostri che la trasformazione (1) è simplettica e se ne calcoli la trasformazione inversa.

(d) Si trovi una funzione generatrice $F = F(q, P)$ (del 'terzo tipo') per la trasformazione simplettica (1).

(e) Si usi la trasformazione simplettica (1) per risolvere le equazioni del moto relative all'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ con dati iniziali $q(0) = e$ e $p(0) = 2$ [ovvero: si scrivano le equazioni di Hamilton per le variabili (Q, P) e le si risolvano per i dati iniziali $(Q(0), P(0))$ corrispondenti a $(q(0), p(0)) = (e, 2)$; si usi l'inversa delle trasformazione (1) per calcolare la soluzione $(q(t), p(t))$]. Si determini l'intervallo di esistenza massimale della soluzione. Si verifichi esplicitamente che la soluzione determinata risolve le equazioni di Hamilton originali.