Meccanica Analitica

A.A. 2015/16 – soluzioni dell'esame scritto (25/01/2017)

Esercizio 1

(a) Il potenziale $V(x)$ è una primitiva di $-F(x)$ e può essere scelto uguale a

$$V(x) = \tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{16x^2}.$$

L'energia meccanica E si conserva, dove

$$E = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x).$$

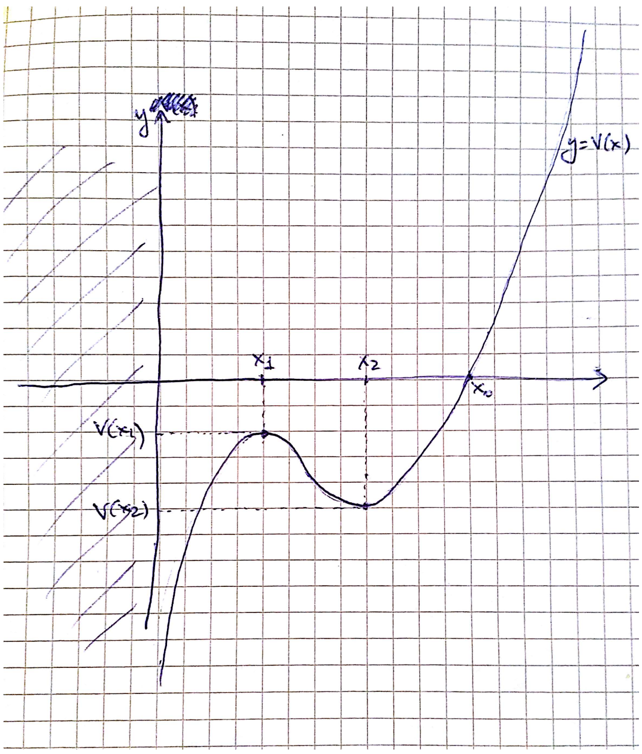

Figura 1: Grafico di $V(x)$.

(b) Per disegnarne il grafico del potenziale (Fig. 1), osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} V(x) = +\infty,$$

Dallo studio del segno del potenziale

$$V(x) = \frac{1}{16x^2}(2x^{10} - 8x^5 - 1)$$

vediamo che $V(x)$ è negativa per $0 < x < x_0 \equiv \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)^{1/5}$ e positiva per $x > x_0$. Inoltre, dallo studio della derivata

$$V'(x) = x^7 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8x^3} = \frac{1}{8x^3}(8x^{10} - 12x^5 + 1),$$

vediamo che $V(x)$ è crescente per $0 < x < x_1 \equiv \left(\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)^{1/5}$ e per $x > x_2 \equiv \left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)^{1/5}$, mentre è decrescente per $x_1 < x < x_2$. Quindi x_1 è un punto di massimo locale (equilibrio instabile) e x_2 è un punto di minimo locale (equilibrio stabile). La frequenza angolare delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile x_2 è

$$\omega = \sqrt{V''(x_2)} = \sqrt{7x_2^6 - 3x_2 - \frac{3}{8}\frac{1}{x_2^4}} = \sqrt{x_2}\sqrt{7x_2^5 - 3 - \frac{3}{8}\frac{1}{x_2^5}} = \left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)^{\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{7}}$$

(c) Il grafico delle curve di livello, di equazione

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$$

al variare dell'energia E, è mostrato in Fig.2. Si noti che le curve sono orientate verso destra nel semipiano superiore, e verso sinistra nel semipiano inferiore.

I moti a energia $E > V(x_1)$ e $E < V(x_2)$ sono tutti a-periodici, e corrispondono a casi in cui il punto materiale cade nell'origine sia nel passato che nel futuro (cosí come i moti con $E = V(x_2)$ e $x(0) < x_1$, o con $V(x_2) < E < V(x_1)$ e $x(0) < x_1$). I moti a energia $V(x_2) < E < V(x_1)$ con $x(0) > x_1$ sono periodici, mentre i casi critici $E = V(x_1)$ o $E = V(x_2)$ corrispondono o a moti 'banali' sui punti di equilibrio ($x(t) \equiv x_1$ o $x(t) \equiv x_2$) o ai moti sulla separatrice ($E = V(x_1)$ e $x(0) \neq x_1$).

Nel caso in cui il moto sia periodico e non banale, i.e., se $V(x_2) < E < V(x_1)$ e $x(0) > x_1$, il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = 4\sqrt{2}\int_{x_-(E)}^{x_+(E)} dx \frac{x}{\sqrt{16Ex^2 - 2x^{10} + 8x^5 + 1}}$$

dove $x_\pm(E)$ sono le due radici di $V(x) = E$ tali che $x_1 < x_-(E) < x_2 < x_+(E)$.

Esercizio 2

(a) I punti hanno coordinate $\mathbf{r}_1 = (x_1, x_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, h)$ da cui ricaviamo $\dot{\mathbf{r}}_1 = (\dot{x}_1, \dot{x}_1)$ e $\dot{\mathbf{r}}_2 = (\dot{x}_2, 0)$. L'energia cinetica del sistema è allora

$$T = m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right).$$

L'energia potenziale è, a meno di una costante inessenziale,

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}k\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2 + x_2^2\right] + mgx_1.$$

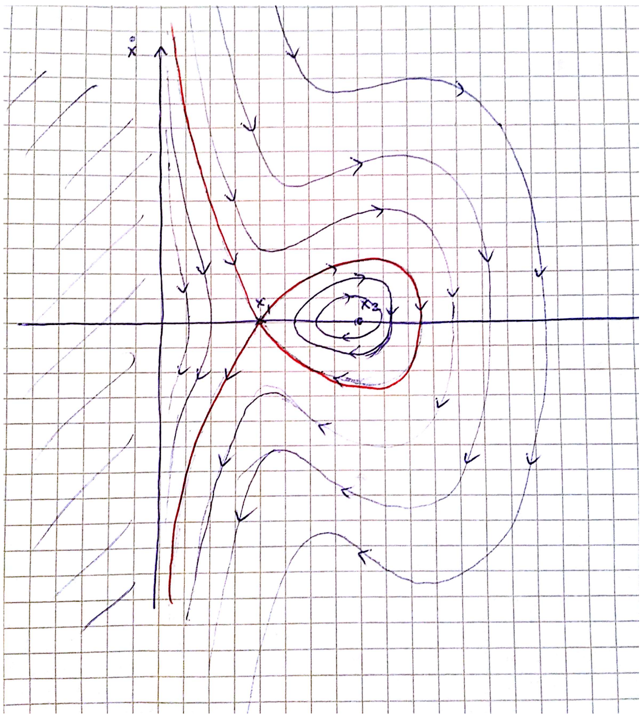

Figura 2: Curve di livello associate al potentiale $V(x)$, al variare dell'energia meccanica E. La curva rappresentata in rosso è la separatrice.

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \tfrac{1}{2}k\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2 + x_2^2\right] - mgx_1.$$

(b) Le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla Lagrangiana del sistema sono:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= -mg - k(2x_1 - x_2 - h) \\ 2m\ddot{x}_2 &= -k(2x_2 - x_1) \end{aligned}$$

(c) I punti di equilibrio sono determinati dalle condizioni

$$\begin{aligned} 0 &= -mg - k(2x_1^* - x_2^* - h) \\ 0 &= -k(2x_2^* - x_1^*) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo $x_2^* = \frac{1}{2}x_1^*$ e

$$x_1^* = \tfrac{2}{3}\left(h - \tfrac{mg}{k}\right),$$

per cui esiste un unico punto di equilibrio, di coordinate

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = \Big(\frac{2}{3}\big(h - \frac{mg}{k}\big), \frac{1}{3}\big(h - \frac{mg}{k}\big)\Big).$$

Per determinarne la stabilità calcoliamo la matrice Hessiana di V:

$$\partial^2_{x_1} V = 2k, \qquad \partial^2_{x_2} V = 2k, \qquad \partial_{x_1}\partial_{x_2} V = -k,$$

da cui si vede che l'Hessiano è indipendente dalla posizione ed è uguale a

$$\mathrm{Hess}(U) = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $\mathrm{Hess}(U)$ sono $\lambda_1 = k$ e $\lambda_2 = 3k$, entrambi positivi: ne segue che $\mathrm{Hess}(U)$ è definita positiva e, quindi, $\mathbf{x}^*$ è un punto di equilibrio stabile. Le frequenze angolari dei modi normali di oscillazione attorno a $\mathbf{x}^*$ sono $\omega_i = \sqrt{\lambda_i/(2m)}$, con $i = 1, 2$, da cui:

$$\omega_1 = \sqrt{\tfrac{3k}{2m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\tfrac{k}{2m}}.$$

Esercizio 3

(a) Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = -\frac{1}{p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{1}{q}. \end{cases}$$

Si noti che $\dot{q}, \dot{p} < 0$, poiché $q, p > 0$.

(b) Si ha che $\partial_p^2 \mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{p^2} > 0$ e quindi $\mathcal{H}$ è regolare. Ricordando che, per le equazioni di Hamilton, $\dot{q} = -1/p$, abbiamo che la Lagrangiana associata a $\mathcal{H}$ è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \dot{q}p - \mathcal{H}(q,p)\big|_{p=-1/\dot{q}} = -\log(-\dot{q}q) + (-1 - \log 2),$$

che è definita per $q > 0$ e $\dot{q} < 0$. L'equazione di Eulero-Lagrange ad essa associata è

$$\frac{d}{dt}\Big(-\frac{1}{\dot{q}}\Big) = -\frac{1}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{\dot{q}^2}{q}.$$

(c) Calcoliamo le parentesi di Poisson fondamentali associate alla trasformazione (1):

$$\{Q, P\}_{(q,p)} = (\partial_q Q)(\partial_p P) - (\partial_p Q)(\partial_q P) = \big(-\frac{p}{2}\big)\big(-\frac{1}{p}\big) - \big(-\frac{q}{2}\big)\big(\frac{1}{q}\big) = 1,$$

che di mostra che la trasformazione è canonica. Si noti che l'immagine del dominio $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ sotto la trasformazione (1) è $I = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$, e la mappa da D a I è invertibile, con inversa

$$\begin{cases} q = \sqrt{-Q}\, e^{P/2} \\ p = 2\sqrt{-Q}\, e^{-P/2} \end{cases} \tag{2}$$

che è definita quindi per $Q < 0$ e $P \in \mathbb{R}$.

(d) Cerchiamo una funzione $F(q,P)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,P), \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P}(q,P) \end{cases}$$

dove $p = 2qe^{-P}$ (come si vede dalla seconda equazione della trasformazione (1)) e

$$Q = -\frac{qp}{2}\Big|_{p=2qe^{-P}} = -q^2e^{-P}.$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial q}(q,P) = 2qe^{-P}, \qquad \frac{\partial F}{\partial P}(q,P) = -q^2e^{-P},$$

da cui

$$F(q,P) = q^2e^{-P}.$$

(e) La trasformazione simplettica mappa $\mathcal{H}(q,p)$ nell'Hamiltoniana

$$H(Q,P) = P.$$

Le nuove equazioni di Hamilton sono allora

$$\begin{cases} \dot{Q} = 1, \\ \dot{P} = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} Q(t) = Q(0) + t, \\ P(t) = P(0). \end{cases}$$

Imponendo i dati iniziali troviamo $P(0) = 1$ e $Q(0) = -e$ da cui

$$\begin{cases} Q(t) = -e + t, \\ P(t) = 1. \end{cases}$$

Si noti che $Q(t) < 0$ per $t < e$. Usando la trasformazione inversa (2) troviamo

$$\begin{cases} q(t) = \sqrt{e(e-t)}, \\ p(t) = 2\sqrt{1 - \frac{t}{e}}. \end{cases}$$

che è definita per $t < e$: l'intervallo di esistenza massimale della soluzione è quindi $(-\infty, e)$.

Derivando esplicitamente la soluzione, si può verificare che risolve le equazioni di Hamilton originali, infatti:

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{e(e-t)} = -\frac{\sqrt{e}}{2}\frac{1}{\sqrt{e-t}} = -\frac{1}{p(t)}$$

e

$$\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}2\sqrt{1-\frac{t}{e}} = -\frac{1}{e}\frac{1}{\sqrt{1-t/e}} = -\frac{1}{q(t)}$$