Meccanica Analitica

A.A. 2015/16 – esame scritto (22/02/2017)

Esercizio 1

[10 punti]

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in 3 dimensioni sotto l'azione della forza

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1 - 4\mathbf{r}^2}{|\mathbf{r}|^7}\hat{\mathbf{r}}.$$

(a) Si trovino quattro integrali primi del moto.

(b) Si discuta brevemente come ridursi a un moto planare, e come ridurre lo studio di tale moto all'analisi del moto radiale e angolare. Si determini il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico.

(c) Si trovino i punti di equilibrio per il moto *radiale* e se ne discuta la stabilità, al variare del momento angolare $L \neq 0$; per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

(d) Si faccia l'analisi qualitativa del moto *radiale*: in particolare, si disegnino le curve di livello e le si orientino nel verso del moto; si determinino i dati iniziali che danno luogo a moti periodici e non periodici. Per i dati iniziali che danno luogo a un moto periodico, se ne calcoli il periodo (sotto forma di un integrale definito).

(e) Si trovino dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico e se ne determini il periodo.

Esercizio 2

[10 punti]

Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato a muoversi su un piano verticale, lungo una guida di equazione $y = x^2/\ell$, con $\ell > 0$ (si assuma che l'asse y è, come usuale, verticale e orientato verso l'alto). Il punto è soggetto alla forza di gravità e a una forza di richiamo elastica di costante $k > 0$ verso il punto $(0, \ell)$ (prodotta da una molla di lunghezza a riposo nulla).

(a) Scegliendo le ascisse dei punti come coordinate generalizzate si scriva la Lagrangiana del sistema;

(b) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange;

(c) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di k. Per $k > 2mg/\ell$, si scelga un punto di equilibrio stabile e si studino le piccole oscillazioni attorno ad esso.

Esercizio 3
[10 punti]
Si consideri l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = p^2 + \frac{p^2}{q^2},$$

con $q > 0$, $p > 0$. Si consideri inoltre la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -(q^2+1)^{3/2}\dfrac{p^2}{q^2}, \\ P = \dfrac{q}{p}\dfrac{1}{\sqrt{q^2+1}}. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si scrivano le equazioni di Hamilton del sistema.

(b) Si trovi la Lagrangiana corrispondente ad $\mathcal{H}$, e si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.

(c) Si dimostri che la trasformazione (1) è simplettica e se ne calcoli la trasformazione inversa.

(d) Si trovi una funzione generatrice $F = F(q,P)$ (del 'terzo tipo') per la trasformazione simplettica (1).

(e) Si usi la trasformazione simplettica (1) per risolvere le equazioni del moto relative all'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ con dati iniziali $q(0) = \sqrt{3}$ e $p(0) = 1$ [ovvero: si scrivano le equazioni di Hamilton per le variabili (Q,P) e le si risolvano per i dati iniziali $(Q(0),P(0))$ corrispondenti a $(q(0),p(0)) = (\sqrt{3},1)$; si usi l'inversa delle trasformazione (1) per calcolare la soluzione $(q(t),p(t))$]. Si determini l'intervallo di esistenza massimale della soluzione. Si verifichi esplicitamente che la soluzione determinata risolve le equazioni di Hamilton originali.