Meccanica Analitica

A.A. 2015/16 – soluzioni dell'esame scritto (22/02/2017)

Esercizio 1
[10 punti]
Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in 3 dimensioni sotto l'azione della forza

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1 - 4\mathbf{r}^2}{|\mathbf{r}|^7}\hat{\mathbf{r}}.$$

(a) Si trovino quattro integrali primi del moto.

(b) Si discuta brevemente come ridursi a un moto planare, e come ridurre lo studio di tale moto all'analisi del moto radiale e angolare. Si determini il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico.

(c) Si trovino i punti di equilibrio per il moto *radiale* e se ne discuta la stabilità, al variare del momento angolare $L \neq 0$; per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

(d) Si faccia l'analisi qualitativa del moto *radiale*: in particolare, si disegnino le curve di livello e le si orientino nel verso del moto; si determinino i dati iniziali che danno luogo a moti periodici e non periodici. Per i dati iniziali che danno luogo a un moto periodico, se ne calcoli il periodo (sotto forma di un integrale definito).

(e) Si trovino dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico e se ne determini il periodo.

Soluzione:

(a) La forza assegnata è centrale: il sistema ammette quindi come integrali primi:

- l'energia meccanica
$$E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|),$$
dove $V(\rho)$ è una primitiva di $F(\rho) = -\rho^{-7} + 4\rho^{-5}$, ad es.,
$$V(\rho) = \frac{1}{6\rho^6} - \frac{1}{\rho^4},$$

- le tre componenti del momento angolare
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

(b) Il moto si svolge sul piano ortogonale al vettore momento angolare. In termini delle coordinate polari (ρ, θ) su tale piano, l'energia meccanica si può riscrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho), \tag{1}$$

dove il potenziale efficace è

$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{6\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} + \frac{L^2}{2\rho^2}.$$

Il moto radiale si calcola per quadrature usando la conservazione di E nella forma (1): una volta calcolata la legge oraria del moto radiale, la coordinata angolare si può ottenere per integrazione dalla relazione

$$\dot{\theta} = L/\rho^2.$$

Per disegnare il grafico del potenziale efficace al variare di $L > 0$, osserviamo che

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}(\rho) = 0,$$

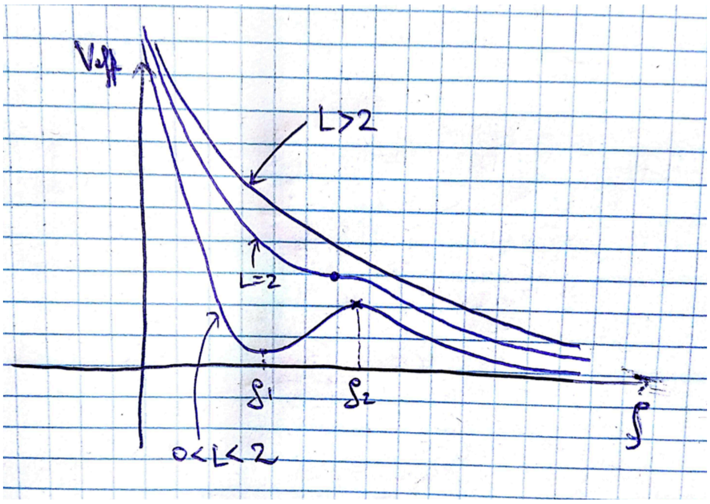

Figura 1: Grafico di $V_{eff}(\rho)$ al variare di $L > 0$.

Dallo studio del segno della derivata

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{1}{\rho^7} + \frac{4}{\rho^5} - \frac{L^2}{\rho^3} = -\frac{1}{\rho^7}(L^2\rho^4 - 4\rho^2 + 1),$$

vediamo che al variare di L si verificano due casi: (1) se $L \geq 2$, $V_{eff}(\rho)$ è strettamente decrescente per ogni $\rho > 0$ (nel caso $L = 2$ il potenziale efficace ammette un punto di equilibrio instabile in $\rho = 1/\sqrt{2}$); (2) se $0 < L < 2$, $V_{eff}(\rho)$ è decrescente per $0 < \rho < \rho_1 := \sqrt{2 - \sqrt{4 - L^2}}/L$ e per $\rho > \rho_2 := \sqrt{2 + \sqrt{4 - L^2}}/L$, mentre è crescente per $\rho_1 < \rho < \rho_2$; inoltre ρ_1 è un punto di minimo locale (equilibrio stabile) e ρ_2 è un massimo locale (equilibrio instabile).

Il grafico risultante, al variare di L è in Fig.1.

(c) Come discusso sopra, esistono punti di equilibrio solo se $L \leq 2$: nel caso $L = 2$ il sistema ammette solo un punto di equilibrio instabile, $\rho = 1/\sqrt{2}$, mentre nel caso $0 < L < 2$ il sistema ammette due punti di equilibrio: $\rho_1 = \sqrt{2-\sqrt{4-L^2}}/L$ stabile, e $\rho_2 = \sqrt{2+\sqrt{4-L^2}}/L$ instabile. Le piccole oscillazioni attorno a ρ_1 hanno frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{V''_{eff}(\rho_1)},$$

dove

$$V''_{eff}(\rho_1) = \frac{7}{\rho_1^8} - \frac{20}{\rho_1^6} + \frac{3L^2}{\rho_1^4} = \frac{7L^8}{(2-\sqrt{4-L^2})^4} - \frac{20L^6}{(2-\sqrt{4-L^2})^3} + \frac{3L^6}{(2-\sqrt{4-L^2})^2}.$$

(d) Il grafico delle curve di livello per il moto radiale, di equazione

$$\dot\rho = \pm\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$$

al variare dell'energia E, è mostrato in Fig.2.

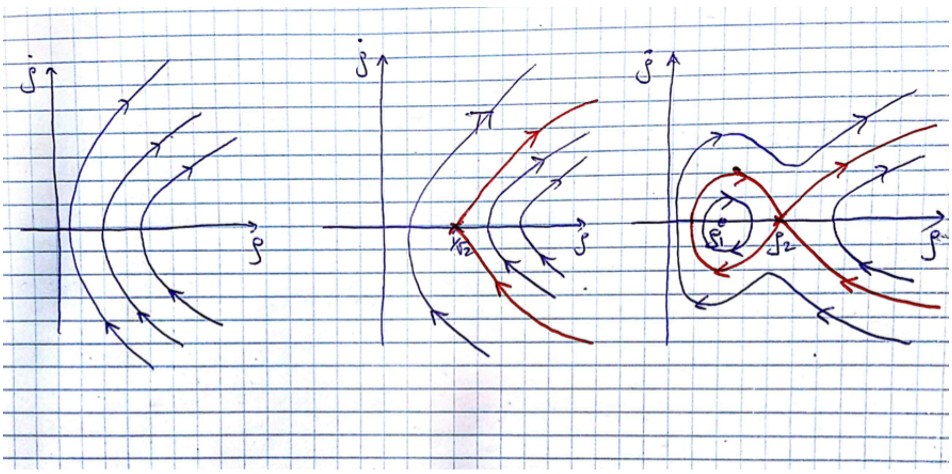

Figura 2: Curve di livello associate al potentiale $V_{eff}(\rho)$, al variare dell'energia meccanica E. Le tre figure illustrano i casi $L > 2$ (figura a sinistra), $L = 2$ (figura al centro) e $0 < L < 2$ (figura a destra). Le curve in rosso sono le separatrici.

Si noti che le curve sono orientate verso destra nel semipiano superiore, e verso sinistra nel semipiano inferiore.

Se $L \geq 2$ i moti sono tutti aperti, e tendono all'infinito sia nel futuro che nel passato (con l'eccezione del caso $L = 2$, nel qual caso esiste la separatrice a energia $E = V_{eff}(1/\sqrt{2})$, su cui $\rho(t)$ tende all'equilibrio instabile nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa). Per $0 < L < 2$, il sistema ammette tre tipi di moti: aperti sia nel passato che nel futuro (se $E > V_{eff}(\rho_2)$, o se $E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$); chiusi e periodici (se $E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$); o i moti sulla separaterice (se $E = V_{eff}(\rho_2)$ – ci sono tre sotto-casi: il moto banale $\rho(t) \equiv \rho_2$; il moto chiuso, che tende sia nel passato che nel futuro a ρ_2; e il moto aperto, che tende nel passato a ρ_2 e nel futuro a $+\infty$, o viceversa).

Nel caso in cui il moto sia periodico e non banale, i.e., se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$, il periodo del moto è

$$T = 2\int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} = 2\sqrt{3}\int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} d\rho \frac{\rho^3}{\sqrt{6E\rho^6 - 3L^2\rho^4 + 6\rho^2 - 1}}$$

dove $\rho_\pm(E)$ sono le due radici di $V_{eff}(\rho) = E$ tali che $\rho_-(E) < \rho_1 < \rho_+(E) < \rho_2$.

(e) Una scelta di dati iniziali che produce un moto complessivo periodico è quella corrispondente al moto radiale 'banale' $\rho(t) \equiv \rho_1$, che si ottiene per $0 < L < 2$, $E = V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) = \rho_1$. In tal caso il moto angolare è circolare uniforme, di frequenza angolare $\dot\theta = L/\rho_1^2 = L^3/(2 - \sqrt{4 - L^2})$ o, equivalentemente, di periodo

$$T = \frac{2\pi(2 - \sqrt{4 - L^2})}{L^3}.$$

Esercizio 2
[10 punti]

Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato a muoversi su un piano verticale, lungo una guida di equazione $y = x^2/\ell$, con $\ell > 0$ (si assuma che l'asse y è, come usuale, verticale e orientato verso l'alto). Il punto è soggetto alla forza di gravità e a una forza di richiamo elastica di costante $k > 0$ verso il punto $(0, \ell)$ (prodotta da una molla di lunghezza a riposo nulla).

(a) Scegliendo le ascisse dei punti come coordinate generalizzate si scriva la Lagrangiana del sistema;

(b) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange;

(c) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di k. Per $k > 2mg/\ell$, si scelga un punto di equilibrio stabile e si studino le piccole oscillazioni attorno ad esso.

Soluzione:

(a) Il punto materiale ha coordinate $\mathbf{r} = (x, x^2/\ell)$, cosicché $\dot{\mathbf{r}} = \dot x(1, 2x/\ell)$. L'energia cinetica del sistema è allora

$$T = \frac{m}{2}\dot x^2 \left(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

L'energia potenziale è

$$V(x) = \tfrac{1}{2}k\left[x^2 + \left(\tfrac{x^2}{\ell} - \ell\right)^2\right] + mg\tfrac{x^2}{\ell}.$$

La Lagrangiana è quindi, a meno di una costante inessenziale,

$$\mathcal{L}(x, \dot x) = \frac{m}{2}\dot x^2\left(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2}\right) - x^2\left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - \frac{k}{2}\frac{x^4}{\ell^2}.$$

(b) L'equazione di Eulero-Lagrange associata alla Lagrangiana del sistema è:

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot x\left(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2}\right)\right] = 4m\dot x^2\frac{x}{\ell^2} - 2x\left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2},$$

ovvero

$$m\ddot x\left(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2}\right) = -4m\dot x^2\frac{x}{\ell^2} - 2x\left(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\right) - 2k\frac{x^3}{\ell^2}, \qquad (2)$$

(c) I punti di equilibrio sono determinati dalla condizione

$$0 = 2x\big(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\big) + 2k\frac{x^3}{\ell^2}$$

ovvero

$$x\Big[\frac{x^2}{\ell^2} + \big(\frac{mg}{k\ell} - \frac{1}{2}\big)\Big] = 0.$$

Vediamo quindi che $x = 0$ è sempre punto di equilibrio, mentre per $k > 2mg/\ell$ ci sono due punti di equilibrio aggiuntivi:

$$x = \pm\ell\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{mg}{k\ell}}.$$

Dallo studio del potenziale $V(x) = \frac{k}{2}\frac{x^4}{\ell^2} + x^2\big(\frac{mg}{\ell} - \frac{k}{2}\big) + \frac{k\ell^2}{2}$, si vede che $V(x)$ ha un unico minimo assoluto in $x = 0$ per $k \leq 2mg/\ell$, mentre ha un massimo locale in 0 e due minimi assoluti in $x = \pm\ell\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{mg}{k\ell}}$ per $k > 2mg/\ell$: quindi $x = 0$ è stabile per $k \leq 2mg/\ell$ e instabile per $k > 2mg/\ell$, mentre $x = \pm\ell\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{mg}{k\ell}}$ sono entrambi stabili per $k > 2mg/\ell$. La frequenza ω delle piccole oscillazioni attorno a $x_+ := \ell\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{mg}{k\ell}}$ per $k > 2mg/\ell$ si ottiene linearizzando l'equazione del moto (2) attorno a x_+: l'equazione linearizzata è

$$m\ddot{x}\big(1 + 4\frac{x_+^2}{\ell^2}\big) = -V''(x_+)(x - x_+),$$

da cui, ricordando che $\frac{x_+^2}{\ell^2} = \frac{1}{2} - \frac{mg}{k\ell}$, si trova che

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_+)}{m(1 + 4x_+^2/\ell^2)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2 - 4\frac{mg}{k\ell}}{3 - 4\frac{mg}{k\ell}}}.$$

Esercizio 3
[10 punti]
Si consideri l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = p^2 + \frac{p^2}{q^2},$$

con $q > 0$, $p > 0$. Si consideri inoltre la trasformazione

$$\begin{cases} Q = -(q^2+1)^{3/2}\dfrac{p^2}{q^2}, \\ P = \dfrac{q}{p}\dfrac{1}{\sqrt{q^2+1}}. \end{cases} \qquad (*)$$

(a) Si scrivano le equazioni di Hamilton del sistema.

(b) Si trovi la Lagrangiana corrispondente ad $\mathcal{H}$, e si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.

(c) Si dimostri che la trasformazione (*) è simplettica e se ne calcoli la trasformazione inversa.

(d) Si trovi una funzione generatrice $F = F(q,P)$ (del 'terzo tipo') per la trasformazione simplettica (*).

(e) Si usi la trasformazione simplettica (*) per risolvere le equazioni del moto relative all'Hamiltoniana $\mathcal{H}$ con dati iniziali $q(0) = \sqrt{3}$ e $p(0) = 1$ [ovvero: si scrivano le equazioni di Hamilton per le variabili (Q,P) e le si risolvano per i dati iniziali $(Q(0),P(0))$ corrispondenti a $(q(0),p(0)) = (\sqrt{3},1)$; si usi l'inversa delle trasformazione (*) per calcolare la soluzione $(q(t),p(t))$]. Si determini l'intervallo di esistenza massimale della soluzione. Si verifichi esplicitamente che la soluzione determinata risolve le equazioni di Hamilton originali.

Soluzione:

(a) Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2\frac{p}{q^2}(1+q^2), \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^3}. \end{cases}$$

(b) Dalla prima equazione di Hamilton si ricava $p = \frac{q^2\dot{q}}{2}\frac{1}{1+q^2}$. La Lagrangiana associata a $\mathcal{H}$ è quindi

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \dot{q}p - \mathcal{H}(q,p)\Big|_{p=\frac{q^2\dot{q}}{2}\frac{1}{1+q^2}} = \frac{q^2\dot{q}^2}{4}\frac{1}{1+q^2}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange ad essa associata è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{q^2\dot{q}}{2}\frac{1}{1+q^2}\Big) = \frac{\dot{q}^2}{2}\frac{q}{(1+q^2)^2},$$

ovvero

$$\ddot{q} = -\frac{\dot{q}^2}{q(1+q^2)}.$$

(c) Calcoliamo le parentesi di Poisson fondamentali associate alla trasformazione (1):

$$\begin{aligned} &\{Q,P\}_{(q,p)} = (\partial_q Q)(\partial_p P) - (\partial_p Q)(\partial_q P) \\ &= \Big(\frac{p^2}{q^3}(2-q^2)\sqrt{1+q^2}\Big)\Big(-\frac{q}{p^2}\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\Big) - \Big(-2\frac{p}{q^2}(1+q^2)^{3/2}\Big)\Big(\frac{1}{p(1+q^2)^{3/2}}\Big) \\ &= 1, \end{aligned}$$

Per calcolare l'inversa della trasformazione (*), si noti che $QP^2 = -\sqrt{1+q^2}$, da cui $q = \sqrt{Q^2P^4-1}$. Si noti inoltre che $QP^3 = -q/p$, da cui $p = -q/(QP^3) = \sqrt{Q^2P^4-1}/(QP^3)$. In conclusione, la trasformazione inversa della (*) è

$$\begin{cases} q = \sqrt{Q^2P^4-1}, \\ p = -\frac{\sqrt{Q^2P^4-1}}{QP^3}. \end{cases} \qquad (**)$$

Si noti che la (*) mappa in modo invertibile il dominio $D = \{q>0, p>0\}$ in $I = \{Q < 0, P > 0 : QP^2 < 1\}$.

(d) Cerchiamo una funzione $F(q,P)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,P), \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P}(q,P) \end{cases}$$

dove $p = \dfrac{q}{P}\dfrac{1}{\sqrt{q^2+1}}$ (come si vede dalla seconda equazione della trasformazione (*)) e

$$Q = -(q^2+1)^{3/2}\frac{p^2}{q^2}\Big|_{p=\frac{q}{P}\frac{1}{\sqrt{q^2+1}}} = -\frac{\sqrt{q^2+1}}{P^2}$$

da cui si trova

$$F(q,P) = \frac{\sqrt{q^2+1}}{P}.$$

(e) La trasformazione simplettica mappa $\mathcal{H}(q,p)$ nell'Hamiltoniana

$$H(Q,P) = \frac{1}{P^2}.$$

Le nuove equazioni di Hamilton sono allora

$$\begin{cases} \dot{Q} = -\frac{2}{P^3}, \\ \dot{P} = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 - \frac{2}{P_0^3}t, \\ P(t) = P_0. \end{cases}$$

Imponendo i dati iniziali troviamo

$$Q_0 = -\frac{8}{3}, \qquad P_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui

$$\begin{cases} Q(t) = -\frac{8}{3} - \frac{16}{3\sqrt{3}}t = -\frac{8}{3}(1+\frac{2t}{\sqrt{3}}), \\ P(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Usando la trasformazione inversa (**) troviamo

$$\begin{cases} q(t) = \sqrt{Q^2P^4-1} = \sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1}, \\ p(t) = \frac{\sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1}}{\sqrt{3}+2t}, \end{cases}$$

che è definita per $t > -\sqrt{3}/4$: l'intervallo di esistenza massimale della soluzione è quindi $(-\sqrt{3}/4, \infty)$.

Derivando esplicitamente la soluzione, si può verificare che risolve le equazioni di Hamilton originali, infatti:

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1} = \frac{8}{3}\frac{\sqrt{3}+2t}{\sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1}} = 2p(t)\Big(1+\frac{1}{q^2(t)}\Big)$$

e

$$\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\Big[\frac{\sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1}}{\sqrt{3}+2t}\Big] = \frac{2}{(\sqrt{3}+2t)^2\sqrt{4(1+2t/\sqrt{3})^2-1}} = 2\frac{p^2(t)}{q^3(t)}.$$