Complementi sulla forma canonica di Jordan

In questa nota, facendo riferimento per definizioni e notazioni al Capitolo 1 di *Introduzione ai sistemi dinamici* del Prof. Guido Gentile (d'ora in poi citato come [G]), vogliamo enunciare alcuni risultati ed esporre alcuni esempi sulla forma canonica di Jordan di una matrice A $n \times n$. Penseremo A come la matrice associata ad un operatore lineare T su $\mathbb{R}^n$ nella base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$: $A_{ij} = (Te_j)_i$.

Supponiamo che lo spettro di T (*i.e.* l'insieme delle n radici del polinomio caratteristico $p_n(\lambda)$ associato a T) contenga l'autovalore λ_1 n_1 volte, l'autovalore λ_2 n_2 volte, ..., l'autovalore λ_m n_m volte. Naturalmente $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. E' noto (vedi [G]) che $\mathbb{R}^n$ puo' essere scritto come somma diretta dei sottospazi $E(T, \lambda_i) = \ker (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$, e che, se $T_i = T | E(T, \lambda_i)$ e' la restrizione di T al sottospazio $E(T, \lambda_i)$, T puo' essere scritto come la somma diretta dei T_i: $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_m$. In altre parole se scegliamo una base $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ tale che: i primi n_1 vettori $\{f_1, \ldots, f_{n_1}\}$ siano una base di $E(T, \lambda_1)$, i successivi n_2 vettori $\{f_{n_1+1}, \ldots, f_{n_1+n_2}\}$ siano una base di $E(T, \lambda_2)$, e cosi' via, la matrice B che rappresenta T nella base $\mathcal{F}$ e' diagonale a blocchi.

Restringiamoci allora ad uno dei sottospazi $E(T, \lambda_i)$ e cerchiamo in questo sottospazio qual e' la base in cui T_i e' rappresentata da una matrice in forma canonica di Jordan. Ricordiamo la definizione di blocco elementare di Jordan e di matrice in forma canonica di Jordan (in una forma lievemente diversa da quella riportata in [G]).

Definizione (Blocco elementare di Jordan). *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$; la matrice $r \times r$*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \tag{0.0}$$

prende il nome di blocco elementare di Jordan *di ordine r. Se $r = 1$, $J = \lambda$.*

Definizione (Matrice in forma canonica di Jordan). *Una matrice si chiama* matrice in forma canonica di Jordan *(* o in forma normale di Jordan*) se è costituita da blocchi elementari di Jordan.*

Per costruire la base di $E(T, \lambda_i)$ in cui T_i e' rappresentata da una matrice in forma canonica di Jordan si puo' procedere nel modo seguente. Si risolva l'equazione $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = 0$. In generale si troveranno $k_i \geq 1$ soluzioni indipendenti $g_1^{(1)}, \ldots, g_{k_i}^{(1)}$, che chiameremo gli *autovettori propri* dell'operatore T. Consideriamo per primo $g_1^{(1)}$ e risolviamo l'equazione $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = g_1^{(1)}$. Se troviamo una soluzione $g_1^{(2)}$, procediamo ancora cercando un vettore v tale che $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = g_1^{(2)}$, e cosi' via, fino a che non troviamo una catena massimale di vettori $\mathcal{C}_1 = \{g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_1^{(m_1^{(i)})}\}$ mandati uno nell'altro dall'operatore $T - \lambda_i \mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}
&(T - \lambda_i \mathbb{1})\, g_1^{(1)} = 0 \\
&(T - \lambda_i \mathbb{1})\, g_1^{(2)} = g_1^{(1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(T - \lambda_i \mathbb{1})\, g_1^{(m_1^{(i)})} = g_1^{(m_1^{(i)}-1)} \,,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Chiamiamo la catena *massimale* se non e' possibile continuarla, ovvero se l'equazione $(T - \lambda_i)v = g_1^{(m_1^{(i)})}$ non ammette soluzione.

Procedendo allo stesso modo per gli autovettori propri $g_2^{(1)}, \ldots, g_{k_i}^{(1)}$, costruiamo altre $k_i - 1$ catene massimali di vettori $\mathcal{C}_2 = \{g_2^{(1)}, g_2^{(2)}, \ldots, g_2^{(m_2^{(i)})}\}$, ..., $\mathcal{C}_{k_i} = \{g_{k_i}^{(1)}, g_{k_i}^{(2)}, \ldots, g_{k_i}^{(m_{k_i}^{(i)})}\}$, tutte con le stesse proprieta' di $\mathcal{C}_1$.

Siamo allora pronti ad enunciare (senza dimostrazione) il risultato principale esposto in questa nota.

TEOREMA 1 *Sia T_i la restrizione a $E(T, \lambda_i)$ dell'operatore T su $\mathbb{R}^n$. E' sempre possibile costruire $k_i \geq 1$ catene di vettori $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{k_i}$, come descritto sopra. L'unione delle k_i catene costituisce una base $\mathcal{C}^{(i)} = \cup_{j=1}^{k_i} \mathcal{C}_j$ di $E(T, \lambda_i)$ (in particolare la somma delle dimensioni delle catene e' uguale alla dimensione n_i di $E(T, \lambda_i)$: $m_1^{(i)} + m_2^{(i)} + \cdots + m_{k_i}^{(i)} = n_i$). Nella base $\mathcal{C}^{(i)}$ l'operatore T_i e' rappresentato da una matrice in forma canonica di Jordan, con k_i blocchi di dimensioni $m_1^{(i)}, \ldots, m_{k_i}^{(i)}$, ciascuno dei quali ha l'autovalore λ_i sulla diagonale.*

Mostriamo adesso esplicitamente in due esempi la validita' del Teorema 1.

Esempio 1 Supponiamo che l'operatore T su $\mathbb{R}^3$ nella base canonica sia rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 4\right) + (-2\lambda - 4) + 2\,(2 + \lambda) \\
&= (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 4\right) - (2\lambda + 4) + (2\lambda + 4) \\
&= (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 4\right) = (2 - \lambda)\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 2)\,,
\end{aligned} \tag{0.2}$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2 \ : \tag{0.3}$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_3 = -2$ di molteplicità rispettivamente $n_1 = 2$ e $n_3 = 1$.

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} &E = E_1 \oplus E_2, \\ &E_1 = \ker (A - 2\mathbb{1})^2 , \\ &E_2 = \ker (A + 2\mathbb{1}) . \end{aligned} \tag{0.4}$$

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita da elementi di due basi: $\{v_1, v_2\}$ in E_1, con le proprieta' descritte sopra (*i.e.* v_1 e v_2 o sono due autovettori propri o formano una catena) e $\{v_3\}$ in E_2: in tale base l'operatore T sara' rappresentato da una matrice B in forma canonica di Jordan.

Iniziamo a costruire la base $\{v_1, v_2\}$. Cerchiamo le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{0.5}$$

Si ha

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{0.6}$$

che fornisce le relazioni

$$-y + 2z = 0, x + y - 2z = 0 \tag{0.7}$$

che, per esempio, ammettono la soluzione $v_1 = (0, 2, 1)$. Vediamo che T_1 ammette un solo autovettore proprio, e quindi cerchiamo v_2 come soluzione dell'equazione:

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.8}$$

che fornisce le relazioni

$$-y + 2z = 0, x + y - 2z = 1 \tag{0.9}$$

che, per esempio, ammettono la soluzione $v_1 = (1, 0, 0)$.

Una base $\{v_3\}$ di E_2 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = -2$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A + 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{0.10}$$

da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \end{cases} \tag{0.11}$$

così che la somma delle prime due dà

$$5x + 4z = 0, \tag{0.12}$$

mentre la loro differenza dà

$$3x - 2y = 0, \tag{0.13}$$

quindi una soluzione non banale è (fissando $z = -5$)

$$v_3 = (4, 6, -5)\,. \tag{0.14}$$

Il Teorema 1 ci dice che, nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$, T e' rappresentato dalla matrice B nella forma canonica di Jordan:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{0.15}$$

Verifichiamolo esplicitamente.

Si ha

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \tag{0.16}$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare T è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T. \tag{0.17}$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \tag{0.18}$$

così che $\det Q = 16$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 16 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{0.19}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 16 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 6 & 20 \\ 32 & -8 & 16 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{0.20}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 2 Supponiamo che l'operatore T su $\mathbb{R}^2$ nella base canonica sia rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$p(\lambda) = -\lambda\,(-2\omega - \lambda) + \omega^2 = \lambda^2 + 2\lambda\omega + \omega^2 = (\lambda + \omega)^2 \tag{0.21}$$

così che lo spettro di A è costituito dai due autovalori coincidenti $\lambda_1, \lambda_2 = -\omega$. Cerchiamo la base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ in cui l'operatore T e' rappresentato da una matrice B in forma canonica di Jordan.

Cerchiamo le soluzioni (x, y) non banali dell'equazione

$$(A + \omega \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{0.22}$$

Si ha

$$(A + \omega \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \tag{0.23}$$

che fornisce la relazione $\omega x + y = 0$ che, per esempio, ammette la soluzione $v_1 = (1, -\omega)$. Vediamo che T ammette un solo autovettore proprio, e quindi cerchiamo v_2 come soluzione dell'equazione:

$$(A + \omega \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}, \tag{0.24}$$

che fornisce la relazione $\omega x + y = 1$ che, per esempio, ammette la soluzione $v_2 = (0, 1)$.

Il Teorema 1 ci dice che, nella base $\{v_1, v_2\}$, T e' rappresentato dalla matrice B nella forma canonica di Jordan:

$$B = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}. \tag{0.25}$$

Verifichiamolo esplicitamente.

Si ha

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.26}$$

se $\{e_1, e_2\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare T è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T. \tag{0.27}$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.28}$$

così che $\det Q = 1$. Si ha quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.29}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{0.30}$$

come volevasi dimostrare.