CMA - Esercizi proposti (13-3-2015)

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha z \\ \dot{y} = x/2 + y + z + 1 \\ \dot{z} = 2x - 2\alpha y + z + 2 \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Per i valori di α per cui il sistema ammette dei punti di equilibrio, se ne studi la stablità.

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \alpha x = e^{2t}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$x^{(4)} - 4x^{(3)} + 3\ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = t^3 + 3t$$

4. Si determini la soluzione generale della seguente equazione per un oscillatore armonico smorzato e forzato:
$$\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \frac{1}{5 - 4\cos t}$$
Suggerimento: Per calcolare i coefficienti di Fourier della forzante, può essere utile notare che
$$\frac{1}{5 - 4\cos t} = \frac{1}{3}\Big[-1 + \frac{1}{1 - e^{it}/2} + \frac{1}{1 - e^{-it}/2}\Big]$$
e che, se $|z| < 1$, allora $\frac{1}{1-z} = \sum_{k\geq 0} z^k$.

5. Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -\omega^2(t)x$, che può essere riespressa come sistema del prim'ordine nella forma:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \equiv A(t)\mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$. Verificare per sostituzione che, se $\omega(t)$ non è costante, allora

$$\mathbf{u}(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}\mathbf{u}_0$$

non è soluzione dell'equazione assegnata (si calcoli esplicitamente la matrice $e^{\int_0^t A(s)ds}$ e si verifichi che la sua derivata seconda *non* risolve l'equazione assegnata)

6. Nel contesto dell'esercizio precedente, si consideri il caso $\omega^2(t) = \omega_0^2(1+\epsilon\cos\omega t)$, la cui teoria è stata discussa a lezione. Si calcoli a meno di errori di ordine $O(\epsilon^3)$ l'equazione della frontiera di stabilità intorno a $\omega = \omega_0$. Si proceda nel modo seguente: si consideri l'operatore lineare ϕ_T (dove $T = 2\pi/\omega$) tale che $\mathbf{u}(T) = \phi_T\mathbf{u}(0)$. A ω fissato, si determini a meno di $O(\epsilon^3)$ l'equazione del luogo dei punti nel piano (ω_0, ϵ) in cui $\mathrm{Tr}\,\Phi_T = 0$, nell'intorno di $(\omega_0, \epsilon) = (\omega, 0)$. Si riconosca che tale luogo di punti è l'unione di due curve della forma

$$\omega_0 = c_1\omega\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\,, \qquad \omega_0 = c_2\omega\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

per due costanti c_1, c_2 da calcolare. Disegnare il grafico della zona di instabilità in cui $\mathrm{Tr}\,\phi_T > 2$ sul piano (ω_0, ϵ) in un intorno di $(\omega, 0)$.