## CMA - Esercizi proposti (20-3-2015)

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y \\ \dot{y} = (\alpha + 2)x + y + \sin t \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

3. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$x^{(3)} + \ddot{x} + \dot{x} + x = t \sin t$$

4. Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico smorzato e forzato:
$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x = \log(2 - \cos t)$$
Si discuta per quali valori di $\alpha$ il sistema omogeneo è sopra-critico, critico o sotto-critico. Si scelga a proprio piacimento un valore di $\alpha$ corrispondente al caso sotto-critico, e si determini la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato per quel valore di $\alpha$.

   [*Suggerimento:* Per calcolare i coefficienti di Fourier della forzante, può essere utile notare che
$$2\mathrm{Re}\Big( \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\alpha n + int}}{n} \Big) = -\log(1 + e^{-2\alpha}) - \log(1 - 2\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-2\alpha}} \cos t),$$
come si può verificare calcolando esplicitamente la somma su $n$ in parentesi. Quindi, scegliendo opportunamente $\alpha$, si può scrivere la forzante in termini del membro di sinistra di tale identità, il che permette un semplice calcolo sistematico dei coefficienti di Fourier. ]