CMA - Primo esonero (30-3-2015) - Soluzioni

1. Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3\alpha z + 1 \\ \dot{y} = 3x + 1 \\ \dot{z} = 3x + 2y - 3z + 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di α, si discuta quanti punti di equilibrio ammette il sistema e se ne studi la stabilità.

(b) [**Facoltativo.**] Si scelga un valore di α per cui il sistema *non* ammette punti di equilibrio, e per tale valore si determini la soluzione generale del sistema.

Soluzione.
(a) Definendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\alpha \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

possiamo riformulare il problema in notazione vettoriale come:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore di componenti x, y, z. Il sistema ammette un unico punto di equilibrio se e solo se A è invertibile, nel qual caso $\mathbf{x}_{eq} = -A^{-1}\mathbf{b}$; se $\det A$=0, il sistema o non ha punti di equilibrio, o ne ha infiniti, il che va stabilito studiando questo secondo caso a parte.
Iniziamo a stabilire per quali valori di α la matrice A è invertibile. Un semplice calcolo mostra che $\det A = -18(1+\alpha)$, cosicché il sistema ammette un unico punto di equilibrio se e solo se $\alpha \neq -1$. Per $\alpha = -1$, la condizione di equilibrio $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ prende la forma:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x &= -1 \\ 3x + 2y - 3z &= -1 \end{cases}$$

Sommando: (prima equazione) + $(2/3)\times$(seconda equazione) $-$ (terza equazione), troviamo $0 = -2/3$ (assurdo), il che vuol dire che il sistema non ammette punti di equilibrio per $\alpha = -1$.

Studiamo ora la stabilità del punto di equilibrio per $\alpha \neq -1$. Determiniamo lo spettro degli autovalori di A: la condizione che il polinomio caratteristico si annulli è

$$\det(A-\lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3\alpha \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)\big(9(1+\alpha)-\lambda^2\big) = 0$$

che ci dà

$$\lambda = -2, \pm 3\sqrt{1+\alpha}.$$

Quindi, se $\alpha > -1$ c'è un autovalore positivo, pari a $+3\sqrt{1+\alpha}$, e il punto di equilibrio è instabile. Se $\alpha < -1$ c'è un autovalore negativo ($\lambda = -2$) e due autovalori immaginari puri ($\lambda = \pm 3i\sqrt{|\alpha|-1}$), e il punto di equilibrio è stabile. [Infatti, indicando con $\mathbf{v}_1$ l'autovettore di autovalore $\lambda_1 = -2$ e con $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2^*$ i due autovettori complessi coniugati di autovalori $\lambda_2 = 3i\sqrt{|\alpha|-1}$, $\lambda_3 = \lambda_2^*$, la soluzione generale in questo caso è

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{eq} + a\mathbf{v}_1 e^{-2t} + \mathrm{Re}\big\{b\mathbf{v}_2 e^{3i\sqrt{|\alpha|-1}}\big\}$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}$. Come evidente, per ogni intorno U di $\mathbf{x}_{eq}$, scegliendo $|a|, |b|$ abbastanza piccoli, il moto rimane confinato in U per tutti i tempi, e quindi $\mathbf{x}_{eq}$ è stabile.]

(b) L'unico valore di α per cui il sistema non ammette punti di equilibrio è $\alpha = -1$. In questo caso gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'equazione per l'autovettore di autovalore $\lambda_1 = -2$ è (chiamando x, y, z le componenti, a priori incognite, di $\mathbf{v}_1$):

$$(A + 2\cdot\mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+2y-3z &= 0 \\ 3x+2y &= 0 \\ 3x+2y-z &= 0 \end{cases}$$

che è risolta da

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione per l'autovettore (o gli autovettori) di autovalore nullo è

$$\begin{cases} x+2y-3z &= 0 \\ 3x &= 0 \\ 3x+2y-3z &= 0 \end{cases}$$

che è risolta da

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per completare la base, è necessario cercare un autovalore generalizzato di autovalore nullo, i.e., un vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$, le cui componenti risolvono l'equazione:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z & = 0 \\ 3x & = 3 \\ 3x + 2y - 3z & = 2 \end{cases}$$

da cui si vede che $\mathbf{v}_3$ può essere scelto come:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la matrice A ha la seguente forma di Jordan: se P è la matrice di cambiamento di base (le cui colonne coincidono con le componenti di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, scritti per colonna), $A = PJP^{-1}$, con

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo allora la soluzione nella forma $\mathbf{x}(t) = y_1(t)\mathbf{v}_1 + y_2(t)\mathbf{v}_2 + y_3(t)\mathbf{v}_3 = P\mathbf{y}(t)$ (qui $\mathbf{y}$ è il vettore di componenti y_1, y_2, y_3). L'equazione per $\mathbf{y}(t)$ è

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + \mathbf{e}_3, \quad \text{con} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo usato che il termine non omogeneo $\mathbf{b}$ coincide con $\mathbf{v}_3$, cosicché $P^{-1}\mathbf{b} = P^{-1}\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Quindi l'equazione per le y_i è

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -2y_1 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = 1 \end{cases}$$

che è risolta da

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{-2t} \\ y_2(t) = t^2/2 + y_3(0)t + y_2(0) \\ y_3(t) = y_3(0) + t \end{cases}$$

In conclusione, la soluzione generale del sistema per $\alpha = -1$ è

$$\mathbf{x}(t) = y_1(0)e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \Big(\frac{t^2}{2} + y_3(0)t + y_2(0)\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \big(y_3(0) + t\big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^{(3)} - 7\dot{x} + 6x = 2 - e^{2t}$$

Soluzione. La soluzione generale è data dalla soluzione generale dell'omogenea più una soluzione particolare della non omogenea. Per determinare la soluzione generale dell'omogenea, cerchiamo una soluzione della forma (cost.)$e^{\lambda t}$: sostituendo tale funzione nell'equazione omogenea troviamo che è soluzione se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico $\lambda^3 - 7\lambda + 6$. Il polinomio caratteristico si fattorizza in $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$, cosicché le sue tre radici sono $\lambda = 1, 2, -3$ e la soluzione generale dell'omogenea è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$$

La soluzione particolare della non omogenea possiamo cercarla come somma di due pezzi, $\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$, il primo che risolve l'equazione non omogenea $x^{(3)} - 7\dot{x} + 6x = 2$, e il secondo che risolve l'equazione non omogenea $x^{(3)} - 7\dot{x} + 6x = -e^{2t}$. La soluzione particolare $\bar{x}_1(t)$ può essere scelta costante, e per sostituzione si trova immediatamente $\bar{x}_1(t) = 1/6$. La soluzione particolare $\bar{x}_2(t)$, dato che e^{2t} risolve l'omogenea, va cercata nella forma $\bar{x}_2(t) = Ate^{2t}$. Si ha: $\dot{\bar{x}}_2(t) = Ae^{2t}(1+2t)$, $\ddot{\bar{x}}_2(t) = Ae^{2t}(4+4t)$, $\bar{x}_2^{(3)}(t) = Ae^{2t}(12+8t)$. Sostituendo nell'equazione per $\bar{x}_2(t)$ troviamo quindi:

$$Ae^{2t}\Big[(12 + 8t) - 7(1 + 2t) + 6t\Big] = -e^{2t},$$

che è risolta da $A = -1/5$. In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata è

$$x(t) = \frac{1}{3} - \frac{t}{5}e^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}.$$

3. Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico forzato:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 4x = \sin^2 t \cos^2 3t$$

con $\alpha \geq 0$.

(a) Si discuta per quali valori di α il sistema omogeneo è sopra-critico, critico o sotto-critico.

(b) Si discuta se esistono delle scelte di $\alpha \geq 0$ per cui la forzante assegnata è in risonanza con l'oscillatore.

(c) Si scelga a proprio piacimento un valore di α corrispondente al caso sopra-critico, e si determini con tale scelta di α la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato.

Soluzione.
(a) Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $\lambda^2 + \alpha\lambda + 4$, le cui radici sono:

$$\lambda_\pm = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$$

Il caso critico corrisponde al caso delle radici coincidenti, quindi $\alpha = 4$. Se $\alpha < 4$ le radici sono complesse coniugate, il che corrisponde al caso sotto-critico. Se $\alpha > 4$ le radici sono reali e distinte, il che corrisponde al caso sopra-critico.

(b) La risonanza può avere luogo solo se $\alpha = 0$. In tal caso il sistema è risonante se e solo se la forzante periodica ha un'armonica coincidente con la pulsazione propria ω_0 dell'oscillatore. Nel nostro caso $\omega_0^2 = 4$ e quindi la pulsazione propria è $\omega_0 = 2$. Dobbiamo allora stabilire se nello sviluppo in serie di Fourier della forzante appare un termine di frequenza angolare $= 2$.
Per determinare lo sviluppo di Fourier della forzante $f(t) = \sin^2 t \cos^2 3t$ usiamo le formule di Eulero per il seno e il coseno: $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$ e $\cos 3t = (e^{3it} + e^{-3it})/2$, cosicché

$$f(t) = \Big(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\Big)^2 \Big(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\Big)^2$$

Sviluppando i quadrati e il prodotto troviamo:

$$f(t) = -\frac{1}{16}\Big[e^{8it} - 2e^{6it} + e^{4it} + 2e^{2it} - 4 + 2e^{-2it} + e^{-4it} - 2e^{-6it} + e^{-8it}\Big]. \tag{1}$$

Quindi la forzante ha i modi a frequenza ± 2 e, per quanto detto sopra, questo implica che il sistema è risonante ad $\alpha = 0$.

(c) Scegliamo, ad esempio, $\alpha = 5$, nel qual caso le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda = -1, -4$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$$

Per trovare una soluzione particolare della non omogenea, riscriviamo l'eq.(1) nella forma:

$$f(t) = \sum_{|n|\leq 4} \hat{f}_n e^{2int}, \quad \text{con} \quad \hat{f}_n = -\frac{1}{16} \times \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = \pm 4 \\ -2 & \text{se} \quad n = \pm 3 \\ 1 & \text{se} \quad n = \pm 2 \\ 2 & \text{se} \quad n = \pm 1 \\ -4 & \text{se} \quad n = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

e cerchiamo la soluzione particolare nella forma $\bar{x}(t) = \sum_{|n|\leq 4} \hat{x}_n e^{2int}$. Sostituendo tale espressione nell'equazione assegnata troviamo:

$$\hat{x}_n = \frac{\hat{f}_n}{(4 - 4n^2) + 10in}, \qquad \forall n \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata è

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \sum_{|n|\leq 4} \frac{\hat{f}_n}{(4 - 4n^2) + 10in} e^{2int},$$

con i coefficienti $\hat{f}_n$ come in eq.(2).