CMA - Soluzioni del primo scritto (8-6-2015)

1. (**12 punti).** Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x + \alpha y \\ \dot{y} = x + y - 1 \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di α, si discuta quanti punti di equilibrio ammette il sistema e se ne studi la stabilità.

(b) Si scelga un valore di α per cui il sistema ammette infiniti punti di equilibrio. Per tale scelta di α, si determini la soluzione generale del sistema, e si disegni il grafico delle traiettorie (con verso) sul piano x-y.

Soluzione.

(a) Il problema si può riformulare in notazione vettoriale come:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{1}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $\det A = \alpha^2 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, 1$. In tal caso, esiste un unico punto di equilibrio, $\mathbf{x}_{eq} = -A^{-1}\mathbf{b}$.
Se $\alpha = 0$, l'equazione per i punti di equilibrio è

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = x + y - 1 \end{cases} \iff \quad y = -x + 1, \tag{2}$$

ovvero ci sono infiniti punti di equilibrio, tutti e soli i punti della retta $y = -x + 1$.
Se invece $\alpha = 1$, l'equazione per i punti di equilibrio è

$$\begin{cases} 0 = x + y \\ 0 = x + y - 1 \end{cases} \tag{3}$$

che non ammette soluzioni, i.e., non ci sono punti di equilibrio.

Per quanto riguarda la stabilità dei punti di equilibrio per $\alpha \neq 1$, si noti che gli autovalori di A sono le radici di $\lambda^2-(\alpha^2+1)\lambda+\alpha^2-\alpha = 0$, ovvero

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2+1+\sqrt{(\alpha^2+1)^2-\alpha^2+\alpha}\Big).$$

In particolare, $\mathrm{Re}\lambda_+ \geq \alpha^2+1 > 0$, quindi almeno uno dei due autovalori di A ha parte reale positiva, che implica che i punti di equilibrio sono sempre instabili.

(b) Poniamo $\alpha = 0$, nel qual caso il sistema ammette infiniti punti di equilibrio (tutti e soli i punti della retta $y = -x+1$). Per tale scelta di α, il sistema assegnato si riduce a:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x+y-1 \end{cases}$$

La prima equazione è risolta da $x(t) = x(0)$, che, sostituita nella seconda, implica $\dot{y} = y + x(0) - 1$, la cui soluzione è $y(t) = (y(0) + x(0) - 1)e^t + 1 - x(0)$. Il grafico delle traiettorie consiste in una collezione di linee verticali nel piano x-y. Tale collezione è tagliata trasversalmente dalla linea di punti fissi $r : y+x-1 = 0$. Il verso di percorrenza delle semirette verticali al di sopra di r è verso l'alto, mentre quello delle semirette al di sotto di r è verso il basso.

2. **(6 punti).** Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^{(5)} - \dot{x} = \sinh t$$

Soluzione.

Per determinare la soluzione generale dell'omogenea, poniamo $x(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo tale *ansatz* nell'equazione omogenea associata, troviamo $\lambda^5 - \lambda = 0$, ovvero $\lambda = 0, \pm 1, \pm i$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione assegnata è una combinazione lineare di $1, e^t, e^{-t}, e^{it}, e^{-it}$:

$$x_{om}(t) = a_1 + a_2 e^t + a_3 e^{-t} + a_4 \cos t + a_5 \sin t.$$

Cerchiamo poi una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = t(ae^t + be^{-t})$. Si trova: $\dot{x}_*(t) = (ae^t + be^{-t}) + t(ae^t - be^{-t})$, $\ddot{x}_*(t) = 2(ae^t - be^{-t}) + t(ae^t + be^{-t})$, $x_*^{(3)}(t) = 3(ae^t + be^{-t}) + t(ae^t - be^{-t})$,

$x_*^{(4)}(t) = 4(ae^t - be^{-t}) + t(ae^t + be^{-t})$, $x_*^{(5)}(t) = 5(ae^t + be^{-t}) + t(ae^t - be^{-t})$, cosicché $x_*^{(5)}(t) - \dot{x}_*(t) = 4(ae^t + be^{-t})$. Imponendo che tale combinazione sia uguale a $\sinh t$, troviamo $a = -b = 1/8$, ovvero $x_*(t) = \frac{1}{4} t \sinh t$. In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata è

$$x(t) = a_1 + a_2 e^t + a_3 e^{-t} + a_4 \cos t + a_5 \sin t + \frac{1}{4} t \sinh t.$$

3. (**12 punti).** Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico forzato:

$$\ddot{x} + x = \big[\sin(t/3)\big]^k,$$

con $k \in \mathbb{N}$.

(a) Per quali valori di k la forzante assegnata è in risonanza con l'oscillatore?

(b) Si scelga a proprio piacimento un valore di k corrispondente a una risonanza, e per tale scelta di k si determini la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato.

Soluzione.

(a) La forzante $f(t) = \big[\sin(t/3)\big]^k$ è una funzione periodica di periodo 6π, che può scriversi in generale nella forma $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int/3}$, che è in risonanza con $\ddot{x} + x$ se e solo se $\hat{f}_{\pm 3} \neq 0$. Per determinare i coefficienti di Fourier di $\big[\sin(t/3)\big]^k$ si noti che

$$\big[\sin(t/3)\big]^k = \frac{1}{(2i)^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e^{i\frac{t}{3}(k-2j)} (-1)^j,$$

quindi $\hat{f}_n \neq 0$ se e solo se $|n| \leq k$ e n ha la stessa parità di k. In conclusione, la forzante è in risonanza con l'oscillatore se e solo se k è un numero dispari ≥ 3.

(b) Scegliamo $k = 3$, nel qual caso

$$\begin{aligned} f(t) &= \big[\sin(t/3)\big]^3 = -\frac{1}{8i}\Big(e^{it} - 3e^{it/3} + 3e^{-it/3} - e^{-it}\Big) \\ &= -\frac{1}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin(t/3). \end{aligned}$$

Cerco una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = at\cos t + b\sin(t/3)$ che, sostituita nell'equazione assegnata ci dà $\ddot{x}_*(t) + x_*(t) = -\frac{1}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin(t/3)$, ovvero

$$-2a\sin t + \frac{8}{9}b\sin(t/3) = -\frac{1}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin(t/3) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8},\ b = \frac{27}{32}$$

In conclusione, ricordando che la soluzione generale dell'omogenea è $a_1 \cos t + a_2 \sin t$, troviamo che la soluzione generale della non omogenea con $k = 3$ è

$$x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + \frac{t}{8}\cos t + \frac{27}{32}\sin(t/3).$$