CMA - Soluzioni del secondo scritto (13-7-2015)

1. (**10 punti).** Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + \alpha z \\ \dot{y} = x + y + \alpha \\ \dot{z} = x + y - 2 - \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di α, si discuta quanti punti di equilibrio ammette il sistema e se ne studi la stabilità.

(b) Si scelga un valore di α per cui il sistema ammette infiniti punti di equilibrio. Per tale scelta di α, si determini la soluzione generale del sistema.

Soluzione.

(a) Il problema si può riformulare in notazione vettoriale come:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{1}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -2-\alpha \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è sempre nullo, quindi la matrice A non è mai invertibile. Questo implica che il sistema o non ammette punti di equilibrio, o ne ammette infiniti. Per stabilire quale di queste due eventualità si verifica al variare di α, studiamo l'equazione per i punti di equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = x + y + \alpha z \\ 0 = x + y + \alpha \\ 0 = x + y - 2 - \alpha \end{cases}$$

Combinando la seconda e terza equazione troviamo

$$\alpha = -2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1.$$

Combinando la prima e la seconda equazione per tale scelta di α troviamo $z = 1$. In conclusione, se $\alpha \neq -1$ il sistema non ammette

punti di equilibrio, mentre se $\alpha = -1$ il sistema ammette una linea di punti di equilibrio, di equazione: $x + y = 1$, $z = 1$.
Per determinare la stabilità di tali punti di equilibrio, calcoliamo lo spettro degli autovalori di A per $\alpha = -1$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

quindi il sistema ammette un autovalore nullo e un autovalore *positivo*, uguale a 1 (con molteplicità doppia). Di conseguenza i punti di equilibrio sono *instabili*.

(b) Poniamo $\alpha = -1$, nel qual caso il sistema ammette infiniti punti di equilibrio (tutti e soli i punti della retta $x + y = 1$, $z = 1$). Per ricavare la soluzione generale del sistema, cerchiamo gli autovettori di A, che nel caso $\alpha = -1$ si riduce a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione per le componenti x, y, z, dell'autovettore ad autovalore nullo è

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\text{cost.}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scegliere

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione per le componenti x, y, z, dell'autovettore con autovalore $\lambda = 1$ è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\text{cost.}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scegliere

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ammette un unico autovettore con autovalore uguale a 1, mentre la molteplicità di 1 è uguale a due: quindi A non è diagonalizzabile. Cerchiamo allora di mettere A nella forma di Jordan: l'equazione per l'autovettore generalizzato associato all'autovettore $\mathbf{v}_3$ è $(A-\mathbb{1})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ che, in componenti, è equivalente a

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_3$$

La matrice A è in forma canonica di Jordan nella base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Inoltre il termine non omogeneo, $\mathbf{b}$, per $\alpha = -1$ è proprio uguale a $-\mathbf{v}_2$. Quindi, ponendo $\mathbf{x}(t) = y_1(t)\mathbf{v}_1 + y_2(t)\mathbf{v}_2 + y_3(t)\mathbf{v}_3$ e sostituendo tale espressione nell'equazione assegnata, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, troviamo il seguente sistema di equazioni per le coordinate $y_i(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = y_2 + y_3 - 1 \\ \dot{y}_3 = y_3 \end{cases}$$

La prima e terza equazione sono risolte da: $y_1 = a_1$ e $y_3(t) = a_3 e^t$, dove a_1 e a_3 sono due costanti opportune (dipendenti dai dati iniziali). Rimpiazzando tali espressioni nella seconda troviamo: $\dot{y}_2 = y_2 + a_3 e^t - 1$, che è risolta da

$$y_2(t) = e^t \Big[a_2 + \int_0^t e^{-s} \big(a_3 e^s - 1 \big) ds \Big]$$

ovvero: $y_2(t) = e^t \big(a_2 + a_3 t - 1 + e^{-t} \big)$, per un'opportuna costante a_2. In conclusione, la soluzione generale del sistema è

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \mathbf{v}_1 + e^t \big(a_2 + a_3 t - 1 + e^{-t} \big) \mathbf{v}_2 + a_3 e^t \mathbf{v}_3$$

o, in coordinate, ricordando le definizioni di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$,

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + a_3 e^t \\ y(t) = -a_1 + e^t \big(a_2 + a_3 t - 1 + e^{-t} \big) \\ z(t) = e^t \big(a_2 + a_3 t - 1 + e^{-t} \big) \end{cases}$$

2. (**8 punti**). Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^{(4)} + \dot{x} = t - e^{-t}$$

Soluzione.
Per determinare la soluzione generale dell'omogenea, poniamo $x(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo tale *ansatz* nell'equazione omogenea associata, troviamo $\lambda^4 + \lambda = 0$, ovvero $\lambda = 0, -1, e^{\pm i\pi/3}$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione assegnata è una combinazione lineare di $1, e^{-t}, e^{t(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}, e^{t(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}$:

$$x_{om}(t) = a_1 + a_2 e^{-t} + a_3 e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + a_4 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Cerchiamo poi una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = at^2 + bte^{-t}$. Si trova: $\dot{x}_*(t) = 2at + be^{-t}(1-t)$, $\ddot{x}_*(t) = 2a + be^{-t}(-2+t)$, $x_*^{(3)}(t) = be^{-t}(3-t)$, $x_*^{(4)}(t) = be^{-t}(-4+t)$, cosicché $x_*^{(4)}(t) + \dot{x}_*(t) = 2at - 3be^{-t}$. Imponendo che tale combinazione sia uguale a $t - e^{-t}$, troviamo $a = 1/2$, $b = 1/3$, ovvero $x_*(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}te^{-t}$. In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata è

$$x(t) = a_1 + a_2 e^{-t} + a_3 e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + a_4 e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{t^2}{2} + \frac{te^{-t}}{3}.$$

3. (**12 punti**). Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico forzato:

$$\ddot{x} + 4x = \big[\sin(t/2) + \cos(t/2)\big]^k,$$

con $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Per quali valori di k la forzante assegnata è in risonanza con l'oscillatore?

   (b) Si scelga a proprio piacimento un valore di k corrispondente a una risonanza, e per tale scelta di k si determini la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato.

Soluzione.

(a) La forzante $f(t) = \big[\sin(t/2)+\cos(t/2)\big]^k$ è una funzione periodica di periodo 4π, che può scriversi in generale nella forma $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f_n e^{int/2}$, che è in risonanza con $\ddot x + 4x$ se e solo se $\hat f_{\pm 4} \neq 0$. Per determinare i coefficienti di Fourier di $\big[\sin(t/2)+\cos(t/2)\big]^k$ si noti che $\sin(t/2)+\cos(t/2) = \sqrt{2}\sin(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})$ e, quindi,

$$\begin{aligned}\big[\sin(t/2)+\cos(t/2)\big]^k &= 2^{k/2}\Big[\sin\Big(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^k = \\ = \frac{2^{k/2}}{(2i)^k}\Big[e^{i(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})}\Big]^k &= \frac{2^{k/2}}{(2i)^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} e^{i(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})(k-2j)}(-1)^j,\end{aligned}$$

quindi $\hat f_n \neq 0$ se e solo se $|n| \leq k$ e n ha la stessa parità di k. In conclusione, la forzante è in risonanza con l'oscillatore se e solo se k è un numero pari ≥ 4.

(b) Scegliamo $k = 4$, nel qual caso, usando l'equazione precedente,

$$\begin{aligned} f(t) &= \big[\sin(t/2)+\cos(t/2)\big]^4 = \frac{1}{4}(-e^{2it} - 4ie^{it} + 6 + 4ie^{-it} - e^{-2it}) \\ &= \frac{3}{2} + 2\sin t - \frac{1}{2}\cos(2t).\end{aligned}$$

Cerco una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = a + b\sin t + ct\sin(2t)$ che, sostituita nell'equazione assegnata ci dà $\ddot x_*(t) + 4x_*(t) = \frac{3}{2} + 2\sin t - \frac{1}{2}\cos(2t)$, ovvero

$$\begin{aligned} 4a + 3b\sin t + 4c\cos(2t) = \frac{3}{2} + 2\sin t - \frac{1}{2}\cos(2t) \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8},\ b = \frac{2}{3},\ c = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

In conclusione, ricordando che la soluzione generale dell'omogenea è $a_1\cos(2t) + a_2\sin(2t)$, troviamo che la soluzione generale della non omogenea con $k = 4$ è

$$x(t) = a_1\cos(2t) + a_2\sin(2t) + \frac{3}{8} + \frac{2}{3}\sin t - \frac{t}{8}\sin(2t).$$