CMA - Soluzioni terzo scritto (10-9-2015)

1. (**10 punti).** Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y + 1 \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = x + z - \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di α, si discuta quanti punti di equilibrio ammette il sistema e se ne studi la stabilità.

(b) Si scelga un valore di α per cui il sistema non ammette punti di equilibrio. Per tale scelta di α, si determini la soluzione generale del sistema.

Soluzione.

(a) Il problema si può riformulare in notazione vettoriale come:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{1}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è uguale a $\alpha - 1$, quindi la matrice A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 1$. Quindi se $\alpha \neq 1$ il sistema ammette un unico punto di equilibrio, mentre se $\alpha = 1$ il sistema o non ammette punti di equilibrio, o ne ammette infiniti. Per stabilire quale di queste due eventualità si verifica, studiamo l'equazione per i punti di equilibrio per $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} 0 = x + y + 1 \\ 0 = x + y \\ 0 = x + z - \alpha \end{cases}$$

che è evidentemente non risolubile, poiché le prime due equazioni sono incompatibili. Quindi per $\alpha = 1$ il sistema non ammette punti di equilibrio.

Per determinare la stabilità del punto di equilibrio per $\alpha \neq 1$, calcoliamo lo spettro degli autovalori di A per $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)\big[(1-\lambda)(\alpha-\lambda)-1\big] \\ &= (1-\lambda)\big[\lambda^2-(\alpha+1)\lambda+\alpha-1\big]=0 \end{aligned}$$

quindi il sistema ammette un autovalore uguale a 1 e gli altri due uguali a $\frac{1}{2}\big(\alpha+1\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4\alpha+4}\big)$. Dato che almeno uno degli autovalori è positivo (quello uguale a 1), il punto di equilibrio è *instabile*.

(b) Poniamo $\alpha = 1$, nel qual caso il sistema non ammette punti di equilibrio. In tal caso il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x} = x+y+1 \\ \dot{y} = x+y \\ \dot{z} = x+z-1 \end{cases}$$

Sommando le prime due troviamo

$$\frac{d}{dt}(x+y) = 2\big(x+y+\frac{1}{2}\big) \implies x(t)+y(t) = ae^{2t}-\frac{1}{2}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è una costante di integrazione. Sottraendo le prime due troviamo

$$\frac{d}{dt}(x-y) = 1 \implies x(t)-y(t) = b+t$$

dove $b \in \mathbb{R}$ è una seconda costante di integrazione. Combinando le due soluzioni troviamo

$$x(t) = \frac{1}{2}\Big(ae^{2t}+t+b-\frac{1}{2}\Big) \qquad y(t) = \frac{1}{2}\Big(ae^{2t}-t-b-\frac{1}{2}\Big)$$

Sostituendo l'espressione di $x(t)$ nell'equazione per z troviamo:

$$\dot{z} = z+\frac{a}{2}e^{2t}+\frac{t}{2}+\frac{b}{2}-\frac{5}{4}$$

che implica:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^t\Big[c+\int_0^t e^{-\tau}\big(\frac{a}{2}e^{2\tau}+\frac{\tau}{2}+\frac{b}{2}-\frac{5}{4}\big)d\tau\Big] \\ &= e^t\Big[c+\frac{a}{2}(e^t-1)-\frac{te^{-t}}{2}+\big(\frac{b}{2}-\frac{3}{4}\big)(1-e^{-t})\Big] \\ &= c'e^t+\frac{a}{2}e^{2t}-\frac{t}{2}-\frac{b}{2}+\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

dove c è una terza costante di integrazione, e nell'ultimo passaggio abbiamo definito $c' = c - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{4}$.

2. (**8 punti).** Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^{(3)} + 4\dot{x} = t + \sin 2t$$

Soluzione. Per determinare la soluzione generale dell'omogenea, poniamo $x(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo tale *ansatz* nell'equazione omogenea associata, troviamo $\lambda^3 + 4\lambda = 0$, ovvero $\lambda = 0, \pm 2i$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione assegnata è una combinazione lineare di $1, \cos 2t, \sin 2t$:

$$x_{om}(t) = a_1 + a_2 \cos 2t + a_3 \sin 2t.$$

Cerchiamo poi una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = at^2 + bt \sin 2t$. Si trova: $\dot{x}_*(t) = 2at + b(\sin 2t + 2t \cos 2t)$, $\ddot{x}_*(t) = 2a + b(4 \cos 2t - 4t \sin 2t)$, $x_*^{(3)}(t) = b(-12 \sin 2t - 8t \cos 2t)$, cosicché $x_*^{(3)}(t) + 4\dot{x}_*(t) = 8at - 8b \sin 2t$. Imponendo che tale combinazione sia uguale a $t + \sin 2t$, troviamo $a = 1/8$, $b = -1/8$, ovvero $x_*(t) = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{8}t \sin 2t$. In conclusione, la soluzione generale dell'equazione non omogenea assegnata è

$$x(t) = a_1 + a_2 \cos 2t + a_3 \sin 2t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{8}t \sin 2t.$$

3. (**12 punti).** Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico forzato:

$$\ddot{x} + x = \sin^2(\omega t),$$

con $\omega > 0$.

(a) Per quali valori di ω la forzante assegnata è in risonanza con l'oscillatore?

(b) Si determini la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato per ogni $\omega > 0$, distinguendo il caso non risonante da quello risonante.

Soluzione.

(a) L'equazione omogenea è quella di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 1$, mentre la forzante può scriversi nella forma $\frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$, da cui risulta evidente che la condizione di risonanza è $2\omega = \omega_0$, ovvero $\omega = 1/2$.

(b) Se $\omega \neq 1/2$, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = a + b\cos(2\omega t)$ che, sostituita nell'equazione assegnata ci dà

$$
\begin{aligned}
a + b(1-4\omega^2)\cos(2\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t) \qquad \Rightarrow \\
\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2(4\omega^2-1)}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, ricordando che la soluzione generale dell'omogenea è $a_1 \cos t + a_2 \sin t$, troviamo che la soluzione generale della non omogenea nel caso *non* risonante ($\omega \neq 1/2$) è

$$
x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2(4\omega^2-1)}.
$$

Se invece $\omega = 1/2$, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $x_*(t) = a + bt\sin t$ che, sostituita nell'equazione assegnata ci dà

$$
\begin{aligned}
a + 2b\cos t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t \qquad \Rightarrow \\
\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, la soluzione generale della non omogenea nel caso risonante ($\omega \neq 1/2$) è

$$
x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t \sin t.
$$