

CMA - Esercizi proposti (12-4-2017)

1. Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -\omega^2(t)x$, con $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \epsilon \cos \omega t)$, la cui teoria è stata discussa a lezione. Si calcoli a meno di errori di ordine $O(\epsilon^3)$ l'equazione della frontiera di stabilità intorno a $\omega = \omega_0$. Si proceda nel modo seguente: si consideri l'operatore lineare ϕ_T (dove $T = 2\pi/\omega$) tale che $\mathbf{u}(T) = \phi_T \mathbf{u}(0)$. A ω fissato, si determini a meno di $O(\epsilon^3)$ l'equazione del luogo dei punti nel piano (ω_0, ϵ) in cui $\text{Tr } \phi_T = 0$, nell'intorno di $(\omega_0, \epsilon) = (\omega, 0)$. Si riconosca che tale luogo di punti è l'unione di due curve della forma

$$\omega_0 = c_1 \omega \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad \omega_0 = c_2 \omega \epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

per due costanti c_1, c_2 da calcolare. Disegnare il grafico della zona di instabilità in cui $\text{Tr } \phi_T > 2$ sul piano (ω_0, ϵ) in un intorno di $(\omega, 0)$.

2. Si dimostri il teorema di Newton, ovvero il fatto che una distribuzione di massa $\sigma(\mathbf{r})$ a simmetria sferica (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|)$ per un'opportuna funzione $\tilde{\sigma}$) e a supporto compatto (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ se $|\mathbf{r}| \geq R_0 > 0$) genera un campo gravitazionale che coincide, al di fuori del suo supporto, con quello generato da una massa puntiforme $M = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ localizzata nel centro della distribuzione stessa. In altre parole, posta una massa puntiforme m in un qualsiasi punto $\mathbf{x}$ al di fuori del supporto di σ , si dimostri che il potenziale gravitazionale del sistema costituito dalla massa m e dalla distribuzione di massa σ è lo stesso di un sistema di due masse puntiformi m e M poste l'una in $\mathbf{x}$ e l'altra nel centro della distribuzione σ .
3. Come discusso a lezione, l'equazione delle traiettorie di una particella in campo gravitazionale è data, in coordinate polari sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$, da:

$$\rho = \rho(\theta) = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \theta}, \quad (1)$$

dove ρ_0 è il raggio corrispondente al minimo del potenziale efficace, e e è una costante positiva (*eccentricità*) che dipende da m, k, E, L . Nel caso in cui $E < 0$, allora $0 < e < 1$, nel qual caso la (1) descrive un'ellisse centrata in uno dei fuochi (come mostrato a lezione).

Si dimostri che per $E = 0$ o $E > 0$, nel qual caso, rispettivamente, $e = 1$ o $e > 1$, la (1) descrive una parabola o un'iperbole centrata in uno dei fuochi.

4. Si determini la sezione d'urto di diffusione differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ per un campo centrale di potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^2},$$

con α un parametro positivo.

5. Si determini la sezione d'urto di diffusione differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ per un campo centrale di potenziale

$$V(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \text{se } \rho < R, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con U_0 e R due parametri positivi.