**CMA - Esercizi proposti (22-3-2017)**

1. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases} \dot{x} = x + \alpha z \\ \dot{y} = x/2 + y + z + 1 \\ \dot{z} = 2x - 2\alpha y + z + 2 \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Per i valori di $\alpha$ per cui il sistema ammette dei punti di equilibrio, se ne studi la stablità.

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

3. Si determini la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y \\ \dot{y} = (\alpha + 2)x + y + \sin t \end{cases}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - \alpha x = e^{2t}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$x^{(4)} - 4x^{(3)} + 3\ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = t^3 + 3t$$

6. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$x^{(3)} + \ddot{x} + \dot{x} + x = t \sin t$$

7. Si determini la soluzione generale della seguente equazione per un oscillatore armonico smorzato e forzato:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \frac{1}{5 - 4\cos t}$$

*Suggerimento:* Per calcolare i coefficienti di Fourier della forzante, può essere utile notare che

$$\frac{1}{5 - 4\cos t} = \frac{1}{3}\left[ -1 + \frac{1}{1 - e^{it}/2} + \frac{1}{1 - e^{-it}/2}\right]$$

e che, se $|z| < 1$, allora $\frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} z^k$.

8. Si consideri la seguente equazione per un oscillatore armonico smorzato e forzato:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = \log(2 - \cos t)$$

Si discuta per quali valori di $\alpha$ il sistema omogeneo è sopra-critico, critico o sotto-critico. Si scelga a proprio piacimento un valore di $\alpha$ corrispondente al caso sotto-critico, e si determini la soluzione generale del problema non omogeneo assegnato per quel valore di $\alpha$.

[*Suggerimento:* Per calcolare i coefficienti di Fourier della forzante, può essere utile notare che

$$2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\alpha n + int}}{n}\Big) = -\log(1 + e^{-2\alpha}) - \log(1 - 2\frac{e^{-\alpha}}{1 + e^{-2\alpha}}\cos t),$$

come si può verificare calcolando esplicitamente la somma su $n$ in parentesi. Quindi, scegliendo opportunamente $\alpha$, si può scrivere la forzante in termini del membro di sinistra di tale identità, il che permette un semplice calcolo sistematico dei coefficienti di Fourier. ]