FM210 - Fisica Matematica I

Prima Prova di Esonero [02-11-2011]

Soluzioni

Esercizio 1

Il sistema è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 2(1+\beta) & \beta \\ 0 & 3\beta & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice A: l'equazione secolare è

$$(2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2(2+\beta)\lambda + 4 + 4\beta - 3\beta^2\right] = 0, \tag{2}$$

ed ha come soluzioni $\lambda_1 = 2$ e

$$\lambda_{2,3} = 2 + \beta \pm \sqrt{4\beta^2},$$

ovvero $\lambda_2 = 2 + 3\beta$ e $\lambda_3 = 2 - \beta$. Dobbiamo perciò distinguere due casi: se $\beta \neq 0$ allora i tre autovalori sono sempre distinti e la matrice è diagonalizzabile, mentre se $\beta = 0$ i tre autovalori coincidono.

(i) ($\beta \neq 0$) Come detto in questo caso abbiamo tre autovalori reali distinti e la matrice A è diagonalizzabile. Cerchiamo quindi gli autovettori associati.
L'autovettore $\mathbf{v}_1$ associato a λ_1 deve soddisfare

$$(A - 2\mathbb{1})\,\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 2\beta & \beta \\ 0 & 3\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che implica $\mathbf{v}_1 = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Possiamo perciò scegliere

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0). \tag{3}$$

L'autovalore associato a λ_2 soddisfa

$$(A - (2+3\beta)\,\mathbb{1})\,\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3\beta & 1-\beta & 0 \\ 0 & -\beta & \beta \\ 0 & 3\beta & -3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che dà $\mathbf{v}_2 = (\frac{1-\beta}{\beta}t, t, t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e quindi scegliendo $t = 1$

$$\mathbf{v}_2 = \left(\tfrac{1-\beta}{\beta}, 1, 1\right). \tag{4}$$

Infine l'ultimo autovettore $\mathbf{v}_3$ soddisfa

$$(A - (2-\beta)\mathbb{1})\,\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta & 0 \\ 0 & 3\beta & \beta \\ 0 & 3\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $\mathbf{v}_3 = (-\frac{1-\beta}{\beta}t, t, -3t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e per $t = 1$

$$\mathbf{v}_3 = \left(-\tfrac{1-\beta}{\beta}, 1, -3\right). \tag{5}$$

Notiamo che $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono ben definiti solo per $\beta \neq 0$.
Le matrici del cambiamento di base e coordinate P e Q sono quindi date da

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-\beta}{\beta} & 1 & 1 \\ -\frac{1-\beta}{\beta} & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -\frac{4}{3}\frac{1-\beta}{\beta} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

e nella nuova base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ il sistema si scrive

$$\dot{\mathbf{x}}' = QAQ^{-1}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2-\beta \end{pmatrix}\mathbf{x}'. \tag{7}$$

La soluzione nelle nuove coordinate $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ è

$$\begin{cases} x'(t) = x'(0)\exp\{2t\}, \\ y'(t) = y'(0)\exp\{(2+3\beta)t\}, \\ z'(t) = z'(0)\exp\{(2-\beta)t\}, \end{cases}$$

con $\mathbf{x}'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = Q(0, 6, -6)$ cioè

$$\mathbf{x}'(0) = \left(2\tfrac{1-\beta}{\beta}, 3, 3\right). \tag{8}$$

Si ha di conseguenza

$$\begin{cases} x'(t) = 2\frac{1-\beta}{\beta}\exp\{2t\}, \\ y'(t) = 3\exp\{(2+3\beta)t\}, \\ z'(t) = 3\exp\{(2-\beta)t\}, \end{cases} \tag{9}$$

e tornando alle coordinate di partenza tramite la matrice $Q^{-1} = P^t$ si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-\beta}{\beta}\exp\{2t\}\left(2 + \exp\{3\beta t\} - 3\exp\{-\beta t\}\right), \\ y(t) = 3\exp\{2t\}\left(\exp\{3\beta t\} + \exp\{-\beta t\}\right), \\ z(t) = 3\exp\{2t\}\left(\exp\{3\beta t\} - 3\exp\{-\beta t\}\right). \end{cases} \tag{10}$$

(ii) ($\beta = 0$) In questo caso i tre autovalori coincidono e la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ovvero è già in forma canonica di Jordan. Possiamo perciò risolvere direttamente il sistema ottenendo

$$\begin{cases} x(t) = x(0)\exp\{2t\} + y(0)\exp\{2t\}\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}\tau\ \exp\{-2\tau\}\exp\{2\tau\} = 6t\exp\{2t\}, \\ y(t) = y(0)\exp\{2t\} = 6\exp\{2t\}, \\ z(t) = z(0)\exp\{2t\} = -6\exp\{2t\}. \end{cases}$$

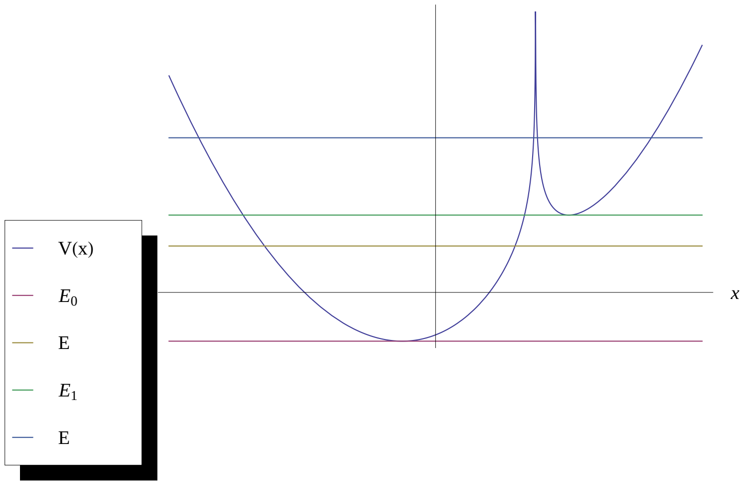

Figura 1: Grafico di $V(x)$ con le rette orizzontali $y = E_0, E_1$ e $y = E$ per due valori di E tali che $E_0 < E < E_1$ e $E > E_1$.

Il punto di equilibrio $(0, 0, 0)$ è sempre instabile perché per ogni $\beta \in [-1, 1]$ esiste sempre l'autovalore $\lambda_1 = 2 > 0$.

Esercizio 2

Procediamo all'analisi qualitativa del moto:

a) Trattandosi di un sistema meccanico senza attrito l'energia meccanica è un integrale primo del moto. L'energia potenziale $V(x)$ è una primitiva di $kx - \frac{k}{4x-3}$ e si può perciò scegliere

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}k\log|4x - 3|\,, \tag{11}$$

cosicché V è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$. Nella fig.1 è disegnato il grafico della $V(x)$: La funzione ha due minimimi isolati in

$$x_0 = -\tfrac{1}{4}, \qquad x_1 = 1. \tag{12}$$

In x_0 in realtà V raggiunge il suo minimo assoluto e si ha

$$E_0 = V(x_0) = \tfrac{1}{32}k\,(1 - 16\log 2) < 0, \qquad E_1 = V(x_1) = \tfrac{1}{2}k > 0. \tag{13}$$

L'energia è

$$E = \tfrac{1}{2}v^2 + V(x) = \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}k\log|4x - 3|\,, \tag{14}$$

con $v = \dot{x}$. Ovviamente i valori ammissibili di E sono

$$E \in [E_0, \infty)\,. \tag{15}$$

b) I punti di equilibrio del sistema corrispondono ai due minimi di $V(x)$ e quindi sono

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, 0), \qquad \mathbf{x}_1 = (x_1, 0), \tag{16}$$

dove abbiamo usato la notazione compatta $\mathbf{x} = (x, v)$.
Entrambi i punti di equilibrio sono stabili per il criterio di Dirchlet in quanto corrispondono a minimi isolati di $V(x)$.

c) L'equazione delle curve di livello si ottiene dalla conservazione dell'energia ed è

$$v = \pm\sqrt{2\,[E - V(x)]}. \tag{17}$$

Si tratta di curve limitate simmetriche rispetto all'asse delle x.
L'orbita $E = E_0$ è data dal solo punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$.
Per $E_0 < E < E_1$ il moto si svolge fra le uniche due soluzioni $x_\pm^{(l)}$ dell'equazione

$$E = V(x), \tag{18}$$

che soddisfano

$$x_-^{(l)} < -\tfrac{1}{4} < x_+^{(l)} < \tfrac{3}{4}. \tag{19}$$

Per dimostrare che esistono solo due soluzioni è sufficiente osservare che $E > V(x_0)$ e quindi esiste almeno una soluzione. Inoltre $V(x) \geq V(x_1) > E$ per $x \geq \frac{3}{4}$ e quindi le intersezioni devono essere per $x < \frac{3}{4}$ ma in tale regione $V(x)$ è monotona decrescente per $x < -\frac{1}{4}$ e monotona crescente per $x > -\frac{1}{4}$ come segue da un semplice studio della derivata. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} V(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\frac{3}{4}} V(x) = \infty,$$

per cui esistono sempre due soluzioni distinte di (18).
Per $E = E_1$ la curva di livello contiene due orbite date dal punto di equilibrio $\mathbf{x}_1$ e da un'orbita situata nella regione $x < \frac{3}{4}$ analoga a quelle descritte sopra.
Per $E > E_1$ la curva di livello contiene due orbite distinte e disgiunte che avvengono rispettivamente fra gli estremi $x_\pm^{(l)}$ e $x_\pm^{(r)}$ soluzioni di (18) che soddisfano

$$x_-^{(l)} < -\tfrac{1}{4} < x_+^{(l)} < \tfrac{3}{4} < x_-^{(r)} < 1 < x_+^{(r)}. \tag{20}$$

L'esistenza di 4 soluzioni distinte alla (18) può essere dedotta esattamente come sopra.
Le orbite del sistema sono disegnate nella fig.2.

d) Per quanto detto in precedenza il moto è globale per ogni valore dell'energia in quanto è limitato sia inferiormente che superiormente e tali limiti si mantengono lontani da $\frac{3}{4}$, unico punto singolare della forza.

e) Dall'analisi fatta in precedenza segue anche che il moto è sempre periodico tranne che in corrispondenza dei punti di equilibrio $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$. Il periodo è dato da

$$T_l = 2\int_{x_-^{(l)}}^{x_+^{(l)}} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}}, \tag{21}$$

per $E_0 < E \leq E_1$. Notare che l'integrale è limitato, i.e., $T_l < \infty$, poiché in un intorno per esempio di $x_-^{(l)}$ si ha dallo sviluppo di Taylor di $E - V(x)$

$$E - V(x) = -V'\left(x_-^{(l)}\right)\left(x - x_-^{(l)}\right) + \mathcal{O}\left(\left(x - x_-^{(l)}\right)^2\right), \qquad V'\left(x_-^{(l)}\right) < 0,$$

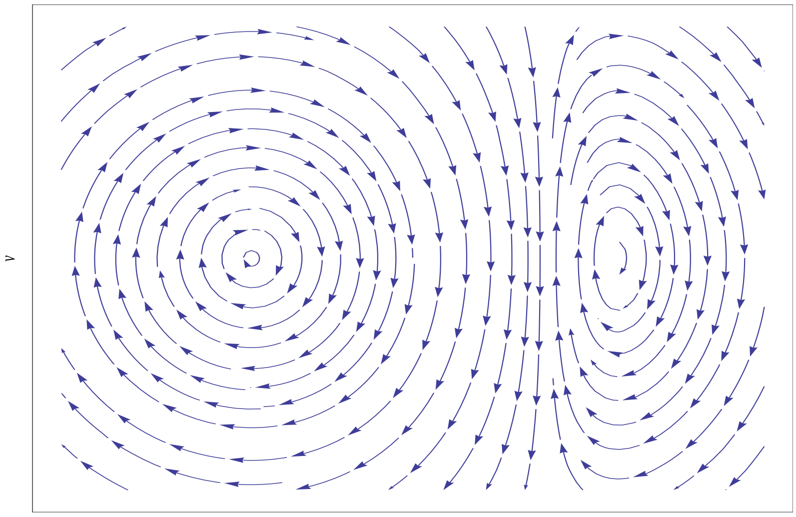

Figura 2: Orbite del sitema meccanico.

il che implica che l'integrando si comporta come

$$\frac{1}{\sqrt{x - x_{\pm}^{(l)}}}$$

ai bordi dell'intervallo ed è perciò integrabile.
Se invece $E > E_1$ ci sono due possibili periodi dati da (21) e

$$T_r = 2 \int_{x_-^{(r)}}^{x_+^{(r)}} \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \tag{22}$$

f) Calcoliamo il sitema linearizzato attorno ai punti di equilibrio e osserviamo che esso è della forma $\dot{\mathbf{x}} = A\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\left(1 + \frac{4}{(4x_i - 3)^2}\right) & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Se valutiamo A in $\mathbf{x}_0$ otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4}k & -\gamma \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono soluzioni di

$$\lambda(\lambda + \gamma) + \tfrac{5}{4}k = 0,$$

cioè

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2}\gamma\left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{5k}{\gamma^2}}\right), \tag{24}$$

la cui parte reale è sempre negativa: Infatti se $0 < \frac{5k}{\gamma^2} \leq 1$ allora

$$\Re(\lambda_{1,2}) = -\tfrac{1}{2}\gamma\left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{5k}{\gamma^2}}\right) < 0,$$

mentre se $\frac{5k}{\gamma^2} > 1$,

$$\Re(\lambda_{1,2}) = -\tfrac{1}{2}\gamma < 0.$$

Quindi il punto $\mathbf{x}_0$ diventa un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
In $\mathbf{x}_1$ abbiamo invece

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5k & -\gamma \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2}\gamma \left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{20k}{\gamma^2}}\right), \tag{25}$$

e prodecedendo come sopra per ogni valore di $k, \gamma > 0$ si ha sempre

$$\Re(\lambda_{1,2}) < 0,$$

per cui il punto $\mathbf{x}_1$ è anch'esso un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Scriviamo anzitutto le equazioni del moto come sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{m}\left(1 + |\mathbf{v}|^2\right)\mathbf{x}. \end{cases} \tag{26}$$

a) I punti di equilibrio del sistema soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ -\frac{1}{m}\left(1 + |\mathbf{v}|^2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

cioè esiste un unico punto di equilibrio $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dove abbiamo posto $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

b) Il sistema linearizzato è della forma $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ con A a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\frac{1}{m}\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{1}_2$ la matrice identità 2 per 2, i.e.,

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono soluzione di $\lambda^2 + \frac{1}{m} = 0$: Cercando autovettori relativi all'autovalore λ della forma $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, si ottengono infatti le equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}, \\ -\frac{1}{m}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}, \end{cases} \tag{28}$$

che hanno soluzione non banale se e solo se vale $\lambda^2 + \frac{1}{m} = 0$.
In ogni caso si ha $\Re(\lambda_i) = 0$ e nulla si può concludere dall'analisi del sistema linearizzato.

c) Osserviamo anzitutto che $W \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Inoltre

(i) $W(\mathbf{X}_0) = 0$ e $W(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(ii) Lungo le traiettorie del sistema

$$\dot{W}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{1 + |\mathbf{v}|^2} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

dove abbiamo usato le equazioni del moto (30).

Se ne conclude che per il teorema di Ljapunov $\mathbf{X}_0$ è un punto di equilibrio stabile.

d) Cerchiamo gli autovalori del sistema linearizzato come sopra: La matrice del sistema linearizzato è ora data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\frac{1}{m}\mathbb{1}_2 & -\gamma\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

e, dato un autovalore λ e il relativo autovettore $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}, \\ -\frac{1}{m}\mathbf{u} - \gamma\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \end{cases} \tag{30}$$

che ammettono una soluzione non banale se e solo se

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{1}{m} = 0. \tag{31}$$

Gli autovalori sono dunque dati da

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{m\gamma^2}}\right). \tag{32}$$

E' facile vedere che per qualunque $m, \gamma > 0$, si ha $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$ e quindi il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.