

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMA PROVA DI ESONERO<sup>†</sup> [02-11-2011]

ESERCIZIO 1 [10]: Si risolva il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + (1 - \beta)y \\ \dot{y} = 2(1 + \beta)y + \beta z \\ \dot{z} = 3\beta y + 2z \end{cases} \quad (1)$$

al variare del parametro  $\beta \in [-1, 1]$  con condizione iniziale

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 6, -6).$$

Si discuta inoltre la stabilità del punto di equilibrio  $(0, 0, 0)$ .

ESERCIZIO 2 [12]: Si descriva qualitativamente il moto del sistema meccanico unidimensionale ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ )

$$\ddot{x} = -kx + \frac{k}{4x - 3}, \quad (2)$$

ovvero:

- si trovi un integrale primo del moto;
- si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità;
- si disegnino le curve di livello e le orbite del sistema;
- si dica se ed eventualmente per quali dati iniziali il moto è globale nel tempo;
- si dica se esistono dati iniziali per cui il moto è periodico; in caso si calcoli il periodo in termini di un integrale definito (eventualmente con estremi di integrazione impliciti);
- si discuta se (e in caso come) vengono modificate le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio in presenza di un termine di attrito  $-\gamma\dot{x}$  ( $\gamma > 0$ ) nel membro di destra dell'equazione del moto.

ESERCIZIO 3 [8]: Si consideri il sistema bidimensionale ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $m > 0$ )

$$m\ddot{\mathbf{x}} = - (1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2) \mathbf{x}. \quad (3)$$

- si determinino i punti di equilibrio del sistema;
- si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno ad uno dei punti di equilibrio e se ne discutano le conseguenze sulla stabilità del punto;
- si verifichi se la funzione

$$W(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \log(1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2) + \frac{|\mathbf{x}|^2}{2},$$

è una funzione di Ljapunov e se ne traggano le conseguenze sulla stabilità del punto di equilibrio;

- [FACOLTATIVO] si studino i punti di equilibrio del sistema in presenza di un termine di attrito  $-\gamma\dot{\mathbf{x}}$  ( $\gamma > 0$ ) nel membro di destra dell'equazione del moto.

---

<sup>†</sup> Non è ammesso l'uso di calcolatrici, appunti o libri.