

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PROVA PRE-ESONERO [28-10-2011]

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

L'ultima equazione si risolve immediatamente dando $z(t) = z_0 e^t$ cosicché il sistema diventa un sistema bidimensionale con termine noto:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}(t), \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 - \alpha \\ \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = (0, 2z_0 e^t). \quad (2)$$

Gli autovalori della matrice A si ottengono dalla soluzione dell'equazione secolare

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{\alpha}, & \text{se } \alpha > 0, \\ 1, & \text{se } \alpha = 0, \\ 1 \pm i\sqrt{|\alpha|} & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

ovvero ci sono due autovalori reali distinti per $\alpha > 0$, due complessi coniugati per $\alpha < 0$ e due reali coincidenti per $\alpha = 0$.

Se $\alpha \neq 0$ la soluzione nelle base in cui la matrice A è diagonale si otterrà risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Q\mathbf{b}(t), \quad (3)$$

dove Q indica la matrice del cambiamento di coordinate.

Il caso $\alpha = 0$ va invece discusso a parte perché la matrice assume la struttura del blocco fondamentale di Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi il sistema si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y + 2z_0 e^t \end{cases}$$

e l'ultima equazione si risolve facilmente ottenendo

$$y(t) = e^t \left(y_0 + 2z_0 \int_0^t d\tau e^{-\tau} e^\tau \right) = (y_0 + 2z_0 t) e^t, \quad (4)$$

che ha sua volta dà

$$x(t) = e^t \left[x_0 + \int_0^t d\tau (y_0 + 2z_0\tau) \right] = (x_0 + y_0 t + z_0 t^2) e^t. \quad (5)$$

Qualunque sia il segno di α esiste sempre un autovalore con parte reale positiva per cui il punto $(0, 0, 0)$ è sempre di equilibrio instabile.

ESERCIZIO 2

Svolgiamo l'analisi qualitativa. Notiamo anzitutto che il potenziale ha una singolarità all'origine $x = 0$, per cui dovremo fare attenzione nello studio qualitativo e verificare se e per quali dati iniziali le traiettorie cadono nella singolarità, non essendo quindi definite globalmente. Assumeremo ovviamente anche che $x(0) = x_0 \neq 0$.

(a) L'energia meccanica $H(x, \dot{x})$ è conservata data l'assenza di attrito:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \left(\frac{4}{x} - 3 \right) e^{-x} = E. \quad (6)$$

(b) I punti di equilibrio si ottengono imponendo

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{4 + 4x - 3x^2}{x^2} e^{-x} = 0, \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

che implica $3x^2 - 4x - 4 = 0$ e dà due punti di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (2, 0)$ e $\mathbf{x}_2 = (-\frac{2}{3}, 0)$ dove $\mathbf{x} = (x, \dot{x})$.

Osservando il grafico della funzione $U(x)$ (vedere fig. 1) si nota facilmente (come si dimostra dall'analisi di U'') che essa ha un minimo isolato in $x = -\frac{2}{3}$ il che implica che \mathbf{x}_2 è stabile per il criterio di Dirichlet. Viceversa è facile vedere che $U''(2) < 0$ e di conseguenza la matrice del linearizzato attorno a \mathbf{x}_1 ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

per un certo $a > 0$. Pertanto gli autovalori di A si ottengono risolvendo $\lambda^2 - a = 0$ e in particolare sono dati da $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. Esiste dunque sempre un autovalore con parte reale positiva e di conseguenza \mathbf{x}_1 è instabile.

(c,d,e) Le curve di livello si ottengono dalla conservazione dell'energia:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E + \left(\frac{4}{x} - 3 \right) e^{-x}}, \quad (7)$$

con derivata

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} \left(-\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 \right) e^{-x}. \quad (8)$$

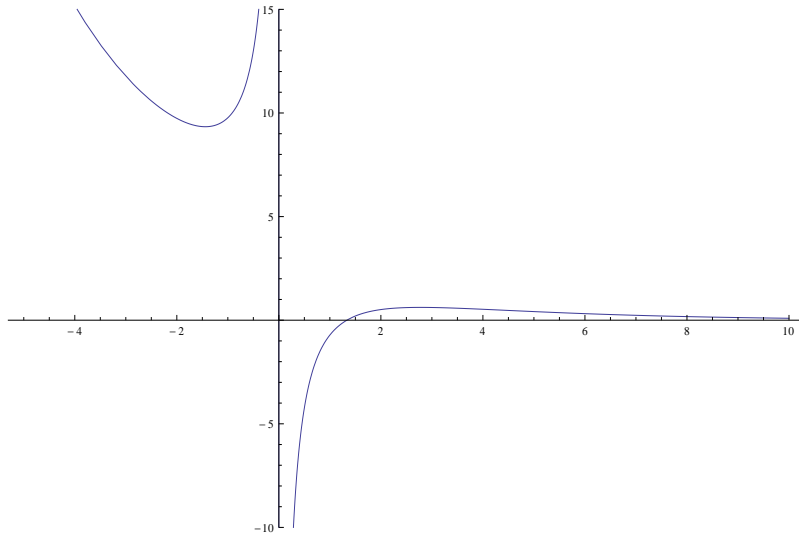


Figura 1: Grafico approssimato della funzione $U(x)$.

Le curve contengono due rami simmetrici rispetto all'asse delle x per cui possiamo restringerci a considerare le curve solo per $y \geq 0$.

Il verso di percorrenza è crescente dove $y > 0$ e decrescente dove $y < 0$.

Calcoliamo anzitutto l'energia dei punti di equilibrio:

$$H(\mathbf{x}_1) = e^{-2} = E_1, \quad H(\mathbf{x}_2) = 9e^{2/3} = E_2, \quad (9)$$

e osserviamo che $H(\mathbf{x}_1) < H(\mathbf{x}_2)$.

Cerchiamo ora le orbite corrispondenti ai valori critici dell'energia: per $E = E_1$ abbiamo le curve di livello date dal punto \mathbf{x}_1 e dall'equazione

$$y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_1 + \left(\frac{4}{x} - 3\right) e^{-x}} \quad (10)$$

che è definita solo per $x \geq 0$. Da (8) otteniamo anche che $y_{\pm}(2) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_{\pm}(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y'_{\pm}(x) = \mp \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{2E_1}{m}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y'_{\pm}(x) = 0.$$

La curva di livello per E_1 si decompone quindi in 5 orbite:

$$\Gamma_{E_1} = \{\mathbf{x}_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}, \quad (11)$$

dove le σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sono i quattro rami delle separatrici che si ottengono da (10) prendendo le due determinazioni della radice ($\sigma_{1,2}$ per $y_0 > 0$ e $\sigma_{3,4}$ per $y_0 < 0$) e spezzando la curva per $0 \leq x \leq 2$ (chiamata σ_1 per $\dot{x}_0 > 0$ e σ_3 per $\dot{x}_0 < 0$) e per $2 \leq x < \infty$ (σ_2 per $\dot{x}_0 > 0$ e σ_4 per $\dot{x}_0 < 0$).

Lungo i rami σ_2 e σ_3 il moto si allontana dal punto di equilibrio \mathbf{x}_1 . Nel primo caso la soluzione è globale nel tempo perché per ogni $2 < x_0 < \infty$ e $\dot{x}_0 > 0$,

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{E_1 - U(x)}} = \infty,$$

mentre nel secondo il moto può cadere nel punto di singolarità $x = 0$ e per ogni $0 < x_0 < 2$, $\dot{x}_0 < 0$, il tempo t_0 che impiega è dato da

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{E_1 - U(x)}} = t_0 < \infty,$$

cioè il moto esiste solo per un tempo t_0 finito.

Sui rami σ_1 e σ_4 invece il moto è globale e in entrambi i casi tende verso il punto di equilibrio \mathbf{x}_1 che non raggiunge mai in quanto

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^6 dx \frac{1}{\sqrt{E_1 - U(x)}} = \infty,$$

perché lo sviluppo di Taylor attorno a $x = 2$ di $E_1 - U(x)$ dà

$$E_1 - U(x) = C(x - 2)^2 + \mathcal{O}(|x - 2|^3),$$

per una certa costante $C > 0$: infatti la derivata della funzione $E_1 - U(x)$ per ipotesi si annulla in corrispondenza di $x = 2$ e la derivata seconda è positiva (punto di massimo di U). Quindi l'integrando si comporta come $(|x - 2|)^{-1}$ che non è integrabile.

Per $E = E_2$ possiamo invece avere solo tre alternative ovvero

$$\Gamma_{E_2} = \{\mathbf{x}_2, \sigma_5, \sigma_6\}, \quad (12)$$

con $\sigma_{5,6}$ le curve identificate dalle due determinazioni della radice

$$y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_2 + \left(\frac{4}{x} - 3\right) e^{-x}}, \quad (13)$$

per $x \geq 0$, che soddisfano

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_{\pm}(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y'_{\pm}(x) = \mp \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{2E_2}{m}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y'_{\pm}(x) = 0.$$

Notare anche che la curva ha un minimo assoluto esattamente per $x = 2$. Il moto è perciò illimitato e si svolge fra $x_0 > 0$ e l'infinito su σ_5 (nel semipiano superiore) e fra x_0 l'origine su σ_6 . In questo secondo caso si verifica lo stesso fenomeno di caduta sull'origine in tempo finito t_0 discusso per σ_3 . Ripetendo la discussione fatta per σ_2 si vede anche che il moto su σ_5 è globale.

Per quanto riguarda le restanti curve di livello e orbite dovremo distinguere fra vari casi: $E \leq 0$, $0 < E < E_1$, $E_1 < E < E_2$ e infine $E > E_2$ (vedere fig. 2 e 3).

(a) $E \leq 0$: in questo caso l'orbita è una sola cioè

$$\Gamma_E = \{\gamma_1\} \quad (14)$$

e si svolge solo per $0 < x < 2$ per cui avremo anche che $0 \leq x_0 < 2$. Essa è limitata superiormente cioè sta fra il punto di inversione $x_i(E)$ che si ottiene risolvendo

$$E = -U(x_i(E)),$$

e l'origine dove il moto incontra la singolarità del potenziale.

E' facile vedere che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +\infty,$$

e (8) implica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} y'(x) = -\infty.$$

Ci troviamo quindi nella regione delimitata dall'asse delle y e dalle separatrici σ_1 e σ_3 .

Dato un dato iniziale $0 < x_0 < x_i(E)$, $\dot{x}_0 < 0$ (quindi sul ramo della curva di livello dato dal segno $-$ nella determinazione della radice in (7)), al tempo $t = 0$, il tempo di caduta t_0 sul centro $x = 0$ è dato dall'indentità

$$\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = t_0,$$

ed è finito per ogni x_0 , quindi la soluzione esiste solo fino al tempo t_0 .

Nel caso in cui $\dot{x}_0 > 0$ il tempo t_0 diventa

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_i(E)} dx \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} + \int_0^{x_i(E)} dx \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = t_0,$$

in quanto la massa deve prima percorrere il tratto da x_0 a $x_i(E)$ e quindi da $x_i(E)$ a $x = 0$.

(b) $0 < E < E_1$: la curva di livello è sempre contenuta nel settore $x \geq 0$ e si spezza in due orbite disgiunte

$$\Gamma_E = \{\gamma_2, \gamma_3\}. \quad (15)$$

Sul primo ramo il moto è confinato fra l'origine e $x_1(E) < 2$ soluzione più piccola di $E = U(x_1(E))$ e si ha lo stesso fenomeno di caduta sul centro descritto nel caso precedente. La descrizione qualitativa delle orbite γ_2 è identica a quella fatta per γ_1 e in particolare ci troviamo sempre nella regione delimitata dall'asse delle y e dalle separatrici σ_1 e σ_3 .

Sul secondo ramo invece il moto è limitato solo inferiormente dal punto di inversione $x_2(E) > 2$ soluzione più grande di $E = U(x_2(E))$ ed è illimitato superiormente, ma la soluzione è globale in t poiché per ogni $x_0 > x_2(E)$

$$\int_{x_0}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = \infty. \quad (16)$$

Inoltre nel semipiano superiore si ha (vedere (8))

$$y(x_2(E)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} y'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0.$$

La regione in cui si svolge il moto è perciò contenuta all'interno di σ_2 e σ_4 .

(c) $E_1 < E < E_2$: la curva di livello si spezza in due orbite disgiunte,

$$\Gamma_E = \{\gamma_4, \gamma_5\} \quad (17)$$

date dalle due determinazioni della radice in (7). In entrambi i casi l'orbita non è limitata superiormente ma mentre nel semipiano superiore il moto si allontana dall'origine per qualunque dato iniziale (quindi del tipo $x_0 > 0$ e $\dot{x}_0 > 0$), al contrario per $\dot{x}_0 < 0$ si verifica lo stesso fenomeno di caduta sul centro in tempo finito t_0 dato da

$$\int_0^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}} = t_0.$$

Nel semipiano superiore si ha inoltre usando (8)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0.$$

L'orbita γ_4 è definita globalmente in t per ogni dato iniziale $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ in quanto vale ancora (16).

Le orbite γ_4 e γ_5 si trovano rispettivamente nella regione delimitata rispettivamente da σ_5 , σ_1 e σ_2 (nel semipiano superiore) e da σ_6 , σ_3 e σ_4 (in quello inferiore).

(d) $E > E_2$: in questo caso avremo 4 orbite, cioè

$$\Gamma_E = \{\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9\}, \quad (18)$$

di cui γ_6 e γ_7 saranno orbite chiuse periodiche tra gli estremi $x_2(E) < x_1(E) < 0$, con $x_1(E)$ e $x_2(E)$ punti di inversione soluzione di $E = U(x)$, $x < 0$. Il periodo del moto sarà dato dall'integrale definito

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_2(E)}^{x_1(E)} dx \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Al contrario le orbite γ_8 e γ_9 si troveranno nel semipiano con $x > 0$ (sopra σ_5 e sotto σ_6 rispettivamente) e avranno le stesse proprietà qualitative di σ_5 e σ_6 .

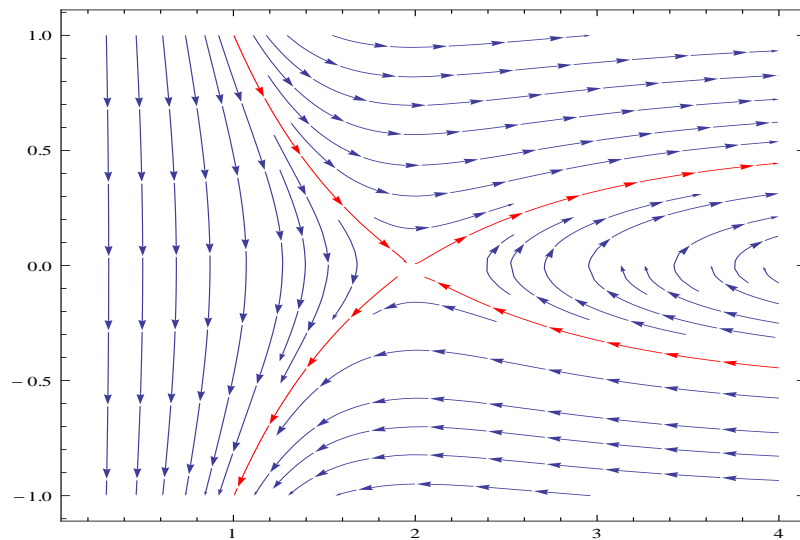


Figura 2: Orbite del sistema nel semipiano $x \geq 0$. In rosso le separatrici corrispondenti all'energia E_1 .

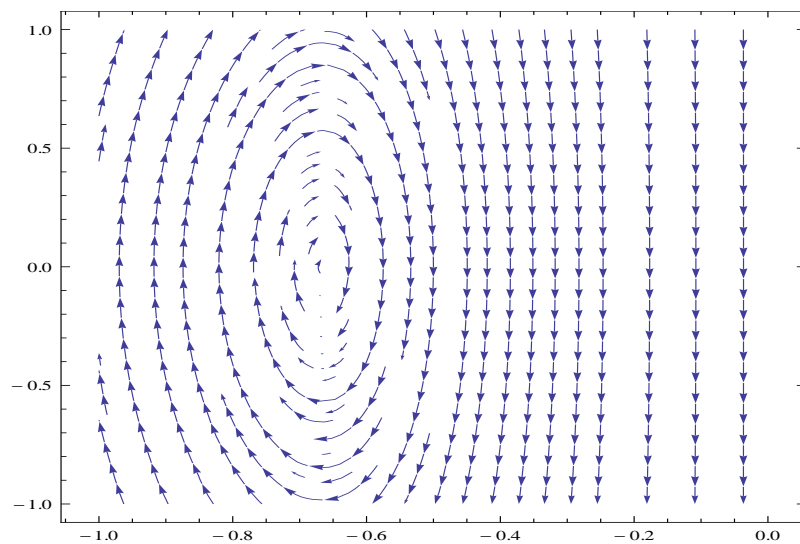


Figura 3: Orbite del sistema nel semipiano $x \leq 0$.

- (f) Secondo la teoria discussa a lezione, la presenza di un termine di attrito $-\gamma\dot{x}$ trasforma il punto di equilibrio \mathbf{x}_2 , associato ad un minimo isolato di $U(x)$, in un punto di equilibrio asintoticamente stabile, mentre il punto di equilibrio instabile \mathbf{x}_1 resta instabile. E' infatti sufficiente studiare la matrice del sistema linearizzato attorno ad un punto di equilibrio di coordinate $(x_i, 0)$ che si scrive

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_i) & -\gamma \end{pmatrix}$$

con autovalori

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - U''(x_i)}$$

Ora nel caso di \mathbf{x}_2 (ovvero per $x_i = -\frac{2}{3}$) si ha $U''(-\frac{2}{3}) > 0$, il che implica che qualunque sia il segno di $\gamma^2 - U''(-\frac{2}{3})$, entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa: se $\gamma^2 - U''(-\frac{2}{3}) \geq 0$, si ha

$$\lambda_{1,2} \leq \lambda_1 \leq -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - U''(x_i)} < 0,$$

mentre nel caso opposto, ovvero quando $\gamma^2 - U''(-\frac{2}{3}) < 0$,

$$\Re(\lambda_{1,2}) = -\gamma < 0.$$

Usando il fatto che $U''(2) < 0$ si può dimostrare in modo analogo che il sistema linearizzato ha almeno un autovalore con parte reale positiva e quindi \mathbf{x}_1 resta instabile.

ESERCIZIO 3

Un semplice calcolo dà

$$m\ddot{\mathbf{x}} = (1 - |\mathbf{x}|^2) \mathbf{x}. \quad (19)$$

- (a) I punti di equilibrio del sistema sono quelli per cui il membro di destra di (19) si annulla, ovvero le coppie $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ del tipo

$$\{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\} \cup \{(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

- (b) Il sistema linearizzato attorno a $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ è della forma (ponendo $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \end{pmatrix},$$

dove la matrice A è a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\frac{1}{m}\mathcal{H}(\mathbf{x}_0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

con \mathcal{H} matrice hessiana associata a $U(\mathbf{x})$ valutata nel punto di equilibrio. Nel caso di $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tale matrice diviene

$$\mathcal{H}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

cosicché la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \frac{1}{m}\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo ora gli autovalori λ di A e assumiamo senza perdita di generalità che gli autovettori abbiano la forma (\mathbf{u}, \mathbf{v}) con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$: si vede facilmente che l'equazione agli autovalori diventa

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \\ \frac{1}{m}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}, \end{cases}$$

che implica $\mathbf{v} = \lambda^2 m \mathbf{v}$ che a sua volta dà

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Dato che c'è sempre un autovalore con parte reale positiva $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio instabile.

(c) Nel caso di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ \mathcal{H} diventa

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

e se procediamo come sopra l'equazione per gli autovalori λ di A diviene

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \\ -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{v}, \end{cases}$$

dove abbiamo posto $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Possiamo avere un autovalore $\lambda_0 = 0$ con autovettore $(\mathbf{x}_0^\perp, 0)$, dove \mathbf{x}_0^\perp è un qualunque vettore con $u_1 = 0$ (per esempio $\mathbf{x}_0^\perp = (0, 1)$).

Altrimenti abbiamo la condizione

$$\begin{cases} -\frac{2}{m}u_1 = \lambda^2 u_1, \\ u_2 = 0, \end{cases}$$

che dà

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}}i.$$

Tutti e tre gli autovalori hanno però parte reale nulla e quindi non si può concludere niente sulla stabilità di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$.

(d) Prendendo $\mathbf{x}(t) = \sqrt{1 + m\omega^2}(\cos(\theta_0 + \omega t), \sin(\theta_0 + \omega t))$ si ha

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -m\omega^2\mathbf{x}(t),$$

ma d'altra parte $|\mathbf{x}(t)|^2 = 1 + m\omega^2$ e quindi il membro di destra della (19) diventa

$$-m\omega^2\mathbf{x}(t),$$

ovvero $\mathbf{x}(t)$ risolve le equazioni del moto per ogni ω e per ogni dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \sqrt{1 + m\omega^2}(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$.

Questo implica che il punto \mathbf{x}_0 è di equilibrio instabile perché prendendo $\theta_0 = 0$ e ω opportunamente piccolo posso prendere una soluzione del tipo di sopra con dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \sqrt{1 + m\omega^2}(1, 0)$ che soddisfa

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{1 + m\omega^2} - 1$$

ma $\mathbf{x}(\frac{\pi}{2\omega}) = \sqrt{1 + m\omega^2}(0, 1)$ cosicché

$$\|\mathbf{x}(\frac{\pi}{2\omega}) - \mathbf{x}_0\|^2 = 2 + m\omega^2$$

Quindi questo dimostra che per ogni $\delta = \sqrt{1 + m\omega^2} - 1$ esiste un dato iniziale $\mathbf{x}(0)$, un tempo $\bar{t} = \frac{\pi}{2\omega}$ e un $\epsilon = \sqrt{2}$ tali che al tempo $t = 0$ $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$ ma $\|\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{x}_0\| > \epsilon$, ovvero \mathbf{x}_0 è instabile.