Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/12

FM210 - Fisica Matematica I

Prova pre-Esonero [28-10-2011]

1. Si risolva il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+\alpha)x + (1-\alpha)y \\ \dot{y} = \alpha x + (1-\alpha)y + 2z \\ \dot{z} = z \end{cases} \tag{1}$$

al variare del parametro $\alpha \in [-1, 1]$ e del dato iniziale $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Si discuta inoltre la stabilità del punto di equilibrio $(0, 0, 0)$.

2. Si descriva qualitativamente il moto del sistema meccanico unidimensionale ($x \in \mathbb{R}$, $m > 0$)

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U(x) = -\left(\frac{4}{x} - 3\right)e^{-x} \tag{2}$$

ovvero:

(a) si trovi un integrale primo del moto;

(b) si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità;

(c) si disegnino le curve di livello e le orbite del sistema;

(d) si dica se ed eventualmente per quali dati iniziali il moto è globale nel tempo;

(e) si dica se esistono dati iniziali per cui il moto è periodico; in caso si calcoli il periodo in termini di un integrale definito;

(f) si discuta se (e in caso come) vengono modificate le proprietà di stabilità dei punti di equilibrio in presenza di un termine di attrito $-\gamma\dot{x}$ ($\gamma > 0$) nel membro di destra dell'equazione del moto.

3. si consideri il sistema meccanico bidimensionale ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $m > 0$)

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}U(\mathbf{x}) , \qquad U(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{x}|^4}{4} \tag{3}$$

(a) si determinino i punti di equilibrio del sistema;

(b) si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno a $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e il corrispondente spettro degli autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità di $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$?

(c) si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno a $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$, con $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$, e il corrispondente spettro degli autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$?

(d) si dimostri che $\mathbf{x}(t) = \sqrt{1 + m\omega^2}(\cos(\theta_0 + \omega t), \sin(\theta_0 + \omega t))$ è soluzione delle equazioni del moto, per ogni θ_0 e ogni ω. Si usi questo fatto per dimostrare che $(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ è instabile.