

FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMA PROVA SCRITTA [26-01-2012]

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

1. Riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + 2, \\ \dot{y} &= y + z - 3, \\ \dot{z} &= 2x + z, \end{cases}$$

e risolviamo la prima equazione:

$$x(t) = x_0 e^{3t} + 2 \int_0^t d\tau e^{3(t-\tau)} = \left(x_0 + \frac{2}{3}\right) e^{3t} - \frac{2}{3}.$$

Inserendo $x(t)$ nell'ultima equazione possiamo ricavare

$$z(t) = z_0 e^t + 2 \int_0^t d\tau e^{t-\tau} x(\tau) = \left(x_0 + \frac{2}{3}\right) e^{3t} + (z_0 - x_0 - 2) e^t + \frac{4}{3},$$

e quindi dalla seconda

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^t + \int_0^t d\tau e^{t-\tau} (z(\tau) - 3) = y_0 e^t + \int_0^t d\tau e^{t-\tau} \left[\left(x_0 + \frac{2}{3}\right) e^{3\tau} + (z_0 - x_0 - 2) e^\tau - \frac{5}{3}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{3}\right) e^{3t} + \left[y_0 - \frac{1}{2}x_0 - 2 + (z_0 - x_0 - 2)t\right] e^t + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

2. La posizione di equilibrio \mathbf{x}_e si trova imponendo $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. L'equazione per x ci dà: $3x_e + 2 = 0 \Rightarrow x_e = -2/3$. L'equazione per z ci dà: $2x_e + z_e = 0 \Rightarrow z_e = -2x_e = 4/3$. Infine l'equazione per y ci dà: $y_e + z_e - 3 = 0 \Rightarrow z_e = 3 - y_e = 5/3$. Per quanto riguarda la stabilità, è sufficiente notare che gli autovalori di A sono 1 e 3, che sono strettamente positivi, il che è sufficiente per concludere per il punto di equilibrio è instabile.

PROBLEMA 2

1. Il sistema si riscrive convenientemente ponendo $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{x} - |\mathbf{y}|^2 \mathbf{y} - (1 - |\mathbf{x}|^2) \mathbf{y}. \end{cases}$$

La posizione di equilibrio è $\mathbf{z}_e = (\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, come si ottiene facilmente ponendo i membri di destra del sistema uguali a zero.

2. Il sistema linearizzato attorno a $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è della forma $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$ (cioè $z_i = x_i$ per $i = 1, 2$ e $z_i = y_i$ per $i = 3, 4$) e

$$(A)_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}},$$

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} y_i, & i = 1, 2, \\ -x_i - |\mathbf{y}|^2 y_i - (1 - |\mathbf{x}|^2) y_i, & i = 3, 4. \end{cases}$$

Otteniamo perciò

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare gli autovalori, impongo l'equazione agli autovalori: $A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$, con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, che mi dà:

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}, \quad -\mathbf{u} - \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{u} - \lambda \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}$$

o equivalentemente $(\lambda^2 + \lambda + 1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Quest'ultima equazione ammette soluzione non banale (i.e., $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) se e solo se $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, le cui soluzioni sono:

$$\lambda = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{3}i).$$

Dato che $\Re(\lambda) = -\frac{1}{2} < 0$ per ogni autovalore λ , il punto di equilibrio è asintoticamente stabile, il che dimostra anche il punto facoltativo 4.

3. La funzione f è ovviamente di classe C^1 e inoltre si ha

(i) $f(\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e) = f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ e $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ per $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}_e$;

(ii) calcoliamo

$$\dot{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{y}} + 2\mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{y}} = -2|\mathbf{y}|^2 (|\mathbf{y}|^2 + 1 - |\mathbf{x}|^2),$$

e osserviamo che il membro di destra è negativo in un intorno dell'origine, ad esempio nel cerchio $\mathcal{I} = \{|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 < 1\}$.

Pertanto f è una funzione di Ljapunov nell'intorno \mathcal{I} di \mathbf{z}_e .

4. Come già osservato sopra, l'asintotica stabilità del punto di equilibrio segue dal fatto che tutti gli autovalori del linearizzato attorno al punto di equilibrio hanno parte reale strettamente negativa. Un modo alternativo di dimostrare l'asintotica stabilità è di usare il teorema di Barbasin-Krasovskij, che ci permette anche di stimare esplicitamente il bacino di attrazione. A tale scopo dobbiamo identificare un intorno di \mathbf{z}_e positivamente invariante che non contenga orbite costituite interamente da punti tali che $\dot{f} = 0$ al di fuori del punto di equilibrio. Per quanto dimostrato in precedenza abbiamo che in \mathcal{I}

$$\dot{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{d}{dt} (|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2) < 0,$$

e di conseguenza \mathcal{I} è positivamente invariante.

Inoltre $\dot{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ in \mathcal{I} se e solo se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ma come si verifica facilmente dalle equazioni del moto l'unica orbita in \mathcal{I} che ha $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ è proprio il punto di equilibrio \mathbf{z}_e .

In conclusione il teorema di Barbasin-Krasovskij si applica e si ottiene come risultato che \mathbf{z}_e è asintoticamente stabile e \mathcal{I} è contenuto nel suo bacino di attrazione.

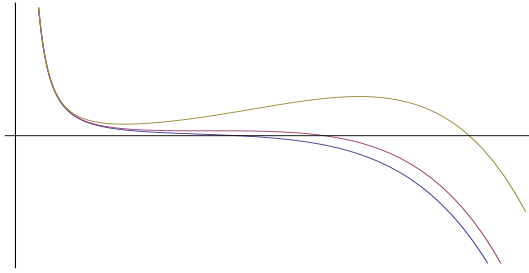


Figura 1: Potenziale efficace $\bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r})$, $\bar{r} > 0$, per $\alpha > \frac{1}{12}$ (blu), $\alpha = \frac{1}{12}$ (viola), e $\alpha < \frac{1}{12}$ (giallo).

PROBLEMA 3

1. Le equazioni del moto per i due punti sono

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{2V_0}{r_0} \left[1 - 3 \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{r_0} \right)^4 \right] \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0}, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{2V_0}{r_0} \left[1 - 3 \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{r_0} \right)^4 \right] \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_0}.$$

2. Il grafico del potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + V(\rho),$$

varia al variare dei parametri del sistema (fig. 1). Se si riscalda il raggio ρ , definendo il parametro adimensionale $\bar{r} := \rho/r_0$, e si pone

$$\bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}) = V_{\text{eff}}(r_0\bar{r}) = V_0 \left[\frac{L^2}{2mr_0^2V_0} \frac{1}{\bar{r}^2} + \bar{r}^2 - \bar{r}^6 \right],$$

si nota che il parametro rilevante è

$$\alpha = \frac{L^2}{2mr_0^2V_0}.$$

Infatti studiando la derivata

$$\frac{d}{d\bar{r}} \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}) = -\frac{2V_0}{\bar{r}^3} [\alpha - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^8],$$

si osserva che V_{eff} : (i) è una funzione monotona decrescente senza punti di equilibrio se $\alpha > \frac{1}{12}$; (ii) è una funzione monotona decrescente con un punto di flesso in $\bar{r}_{eq} = \frac{1}{6}$ se $\alpha = \frac{1}{12}$; (iii) ammette un minimo locale in $\bar{r}_- = \left[\frac{1}{6}(1 - \sqrt{1 - 12\alpha}) \right]^{1/4}$ e un massimo locale in $\bar{r}_+ = \left[\frac{1}{6}(1 + \sqrt{1 - 12\alpha}) \right]^{1/4}$ se $\alpha < 1/12$. In tutti i casi

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0^+} \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}) = +\infty, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}) = -\infty.$$

Per quanto riguarda l'analisi qualitativa del moto radiale, si trova immediatamente che nel caso $\alpha > \frac{1}{12}$ (fig. 2) non esistono punti di equilibrio e le orbite sono tutte aperte. Per $\alpha = \frac{1}{12}$ (fig. 3) le orbite sono ancora tutte aperte con l'eccezione dell'orbita "banale" $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}_{eq}$ corrispondente al punto di flesso (equilibrio instabile). Infine se $\alpha < \frac{1}{12}$ (fig. 4) ci sono due punti di equilibrio \bar{r}_- e \bar{r}_+ soluzioni di $\bar{V}'_{\text{eff}}(\bar{r}) = 0$ di cui il primo stabile e il secondo instabile e le orbite sono sempre aperte sia per $E > \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}_+)$ che per $E < \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}_-)$. Per $\bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}_-) < E < \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r}_+)$ sono possibili due orbite: risolvendo l'equazione $E = \bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r})$ si ottengono tre radici $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, tali che: $0 < \bar{r}_1 < \bar{r}_- < \bar{r}_2 < \bar{r}_+ < \bar{r}_3$ e si ha un'orbita periodica per dati iniziali fra \bar{r}_1 e \bar{r}_2 e una aperta per dati iniziali $\bar{r} \geq \bar{r}_3$.

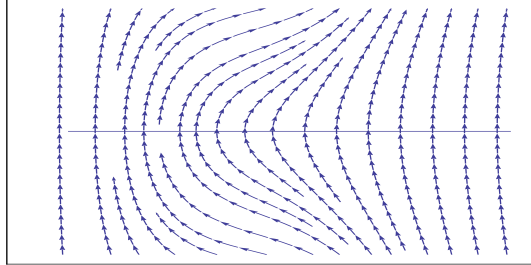


Figura 2: Orbite nel caso $\alpha > \frac{1}{12}$.

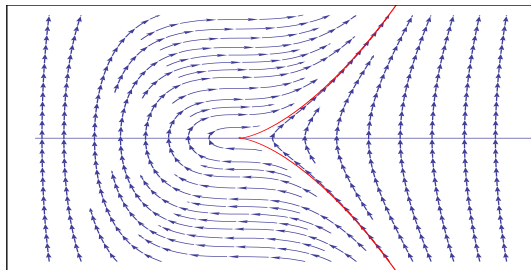


Figura 3: Orbite nel caso $\alpha = \frac{1}{12}$ con evidenziate le separatrici (rosso).

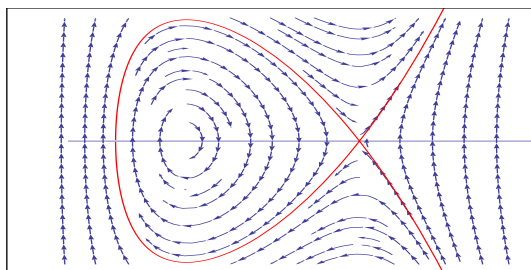


Figura 4: Orbite nel caso $\alpha < \frac{1}{12}$ con evidenziate le separatrici (rosso).

3. Un moto periodico complessivo è possibile solo per $\alpha \leq \frac{1}{12}$. In questo caso si può prendere un moto complessivo dato dal centro di massa in quiete e moto radiale in un punto di equilibrio. Prendiamo ad esempio $\alpha < \frac{1}{12}$ e $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}_+$. In questo caso il periodo T del moto complessivo sarà quello associato al moto angolare e si avrà

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{mr_0^2 \bar{r}_+^2} \implies T = \frac{2\pi mr_0^2 \bar{r}_+^2}{L}.$$

PROBLEMA 4

1. Indichiamo con 1, 2, 3 gli atomi di massa uguale m e con 4 l'atomo di massa $2m$. Scegliamo inoltre un sistema di coordinate con asse x passante per gli atomi 1 e 2 e con l'origine esattamente a metà di tale segmento. Prendiamo l'asse y passante per l'atomo 3 e l'asse z ortogonale al piano x, y con la molecola orientata in modo che 4 si trovi nel semipiano $z \geq 0$. Con tale scelta abbiamo

$$\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \ell, \quad \mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \ell, \quad \mathbf{x}_3 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \ell, \quad \mathbf{x}_4 = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \ell.$$

Pertanto si ha

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \frac{1}{5m} \left(m \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i + 2m\mathbf{x}_4 \right) = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \ell.$$

2. Calcoliamo anzitutto le posizioni \mathbf{x}'_i degli atomi rispetto a un sistema di coordinate K con l'origine nel centro di massa e gli assi coordinati orientati nello stesso modo descritto sopra; i.e., $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\text{cm}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \ell, & \mathbf{x}'_2 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \ell, \\ \mathbf{x}'_3 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \ell, & \mathbf{x}'_4 &= \left(0, 0, \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \ell. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia attorno al centro di massa in questo sistema di riferimento ha elementi uguali a (ponendo $\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m \sum_{i=1}^3 (y_i'^2 + z_i'^2) + 2m (y_4'^2 + z_4'^2) = \frac{13}{10} m \ell^2, \\ I_{yy} &= m \sum_{i=1}^3 (x_i'^2 + z_i'^2) + 2m (x_4'^2 + z_4'^2) = \frac{13}{10} m \ell^2, \\ I_{zz} &= m \sum_{i=1}^3 (x_i'^2 + y_i'^2) + 2m (x_4'^2 + y_4'^2) = m \ell^2, \\ I_{xy} = I_{yx} &= -m \sum_{i=1}^3 x'_i y'_i - 2m x'_4 y'_4 = 0, \\ I_{xz} = I_{zx} &= -m \sum_{i=1}^3 x'_i z'_i - 2m x'_4 z'_4 = 0, \\ I_{yz} = I_{zy} &= -m \sum_{i=1}^3 y'_i z'_i - 2m y'_4 z'_4 = 0. \end{aligned}$$

3. Dato che l'operatore di inerzia è già diagonale nel sistema di coordinate K , gli assi principali di inerzia (che chiameremo $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) coincidono con gli assi cartesiani di tale sistema e passano per costruzione per il centro di massa. Inoltre, dato che $I_{xx} = I_{yy}$, l'ellissoide d'inerzia è simmetrico attorno a \hat{e}_3 , quindi il sistema ammette, oltre alla scelta canonica $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, infiniti altri assi principali di inerzia, che sono tutte le rette parallele al piano (\hat{e}_1, \hat{e}_2) e passanti per il centro di massa.

Notare che si sarebbe potuto identificare facilmente l'asse principale di inerzia \hat{e}_3 osservando che il sistema ha un asse di simmetria di ordine 3 passante per \mathbf{x}_4 e \mathbf{x}_{cm} , che quindi deve essere un asse principale di inerzia. Inoltre, siccome l'ordine di simmetria è maggiore di 2, si ottiene immediatamente che l'ellissoide di inerzia deve essere di rotazione attorno a tale asse e quindi gli altri due momenti di inerzia devono essere uguali (come è risultato correttamente dal calcolo).

4. I momenti principali di inerzia sono già stati calcolati e si ha

$$I_1 = I_2 = I_{xx} = \frac{13}{10}m\ell^2, \quad I_3 = I_{zz} = m\ell^2.$$

5. Le rotazioni stazionarie sono tutte e sole quelle corrispondenti a una velocità angolare è parallela a un asse principale di inerzia, quindi $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$ o $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$.