FM210 - FISICA MATEMATICA I

PRIMO APPELLO [26-1-2012]

• **Problema 1 (6 punti).**

Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Si risolva il sistema con dato iniziale generico $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

• **Problema 2 (7 punti).** Sia dato il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} - |\dot{\mathbf{x}}|^2 \dot{\mathbf{x}} - (1 - |\mathbf{x}|^2) \dot{\mathbf{x}},$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

1. Si trovi la posizione di equilibrio del sistema.
2. Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio e si determinino i corrispondenti autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità del punto di equilibrio?
3. Si verifichi che $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ con $\mathbf{y} := \dot{\mathbf{x}}$ è una funzione di Ljapunov per il sistema in un intorno del punto di equilibrio e si stimi esplicitamente tale intorno.
4. **[Facoltativo.]** Si dimostri che il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

- **Problema 3 (10 punti).** Si considerino due punti materiali di massa m , che interagiscono attraverso una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = V_0 \left[\left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^6 \right]$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti e $V_0, r_0 > 0$.

1. Scrivere le equazioni del moto per i due punti.

Si descriva il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà (descrivibile attraverso le due variabili polari ρ, θ).

2. Si disegnino, al variare di E e di $\mathbf{L}$ (per $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$):

- (a) il grafico del potenziale efficace per il moto radiale;
- (b) le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

e si studi qualitativamente il moto radiale.

3. Individuare un moto periodico per il sistema complessivo e calcolarne il periodo in termini di un integrale definito.

- **Problema 4 (7 punti).** Una molecola rigida è costituita da 4 atomi ai vertici di un tetraedro regolare di lato ℓ , tre di massa m e uno di massa $2m$.

1. Determinare la posizione del centro di massa della molecola.
2. Si determinino gli assi principali di inerzia della molecola attorno al centro di massa.
3. Si calcolino i momenti principali di inerzia della molecola attorno al centro di massa.
4. Si stabilisca quali sono le possibili rotazioni stazionarie della molecola in assenza di forze esterne.