

Docente: Dr. Alessandro Giuliani

• **LE EQUAZIONI DELLA MECCANICA**

- Equazioni di Newton. Riduzione a un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine.

• **OPERATORI LINEARI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI.**

- Richiami di algebra lineare: cambiamento di base e di coordinate, matrici diagonalizzabili, spettro di una matrice, autovettori, criteri di diagonalizzabilità. Matrici simmetriche e (semi)definite positive. Prodotti scalari e norme. Equivalenza tra le norme in  $\mathbb{R}^n$ .
- Risolubilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti costanti: caso omogeneo e caso non omogeneo. Diagonalizzazione e riduzione alla forma canonica di Jordan.
- Sistemi planari lineari omogenei: discussione generale delle proprietà qualitative del moto (nodi propri e impropri, pozzi e sorgenti, moti a spirale, centri).
- Alcune applicazioni: l'oscillatore armonico smorzato e forzato; l'oscillatore armonico forzato in assenza di attrito; risonanze; moto di un grave in un fluido viscoso.

• **EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE.**

- Sistemi di equazioni differenziali non lineari. Il problema di Cauchy. Funzioni Lipschitziane. Teorema di esistenza e unicità locale (esistenza: cenni di dimostrazione, metodo degli approssimanti di Picard e stima esplicita dell'intervallo di esistenza). Lemma di Gronwall. Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (corollario: unicità della soluzione al problema di Cauchy). Teorema di dipendenza  $C^k$  dai dati iniziali (solo enunciato).
- Prolungamento di una soluzione. Esistenza del prolungamento massimale. Teoremi di prolungamento: caratterizzazione del comportamento della soluzione massimale ai bordi dell'intervallo di esistenza massimale. Corollario: stime a priori sulla soluzione implicano esistenza globale.
- Lemma: traiettorie distinte di un sistema dinamico non si intersecano. Teorema: le equazioni di Newton con forze conservative definite su tutto lo spazio ammettono soluzione unica globale nel tempo (con o senza attrito).

• **ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO E STABILITÀ.**

- Sistema dinamico linearizzato attorno a un punto di equilibrio. Teorema: se gli autovalori del linearizzato hanno tutti parte reale negativa, allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile. Teorema: se esiste almeno un autovalore del linearizzato con parte reale positiva, allora il punto di equilibrio è instabile. Teorema di Ljapunov. Insieme omega-limite. Teorema di Dirichlet. Teorema di Barbasin-Krakovski. Alcune conseguenze: stabilità asintotica dei punti di minimo locale dell'energia potenziale in sistemi meccanici con attrito; instabilità dei punti stazionari (di sella o di massimo locale) dell'energia potenziale in sistemi meccanici con o senza attrito.
- Integrali primi. Riduzione dimensionale e integrabilità in presenza di grandezze conservate.
- Analisi qualitativa di sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Studio delle curve di livello, calcolo delle traiettorie, calcolo e stima del periodo dei moti periodici, calcolo del moto sulla separatrice, integrabilità per quadrature del moto. Il pendolo matematico.

- Integrabilità dei moti in campo centrale e del moto di due particelle in  $\mathbb{R}^3$  che si attraggono o respingono con una coppia di forze radiali uguali e opposte. Moto del baricentro e moto relativo. Conservazione della quantità di moto totale e del momento angolare. Riduzione dimensionale e integrali primi. Potenziale efficace. L'equazione della traiettoria. I punti stazionari dell'energia potenziale efficace corrispondono a moti periodici del sistema. Moti quasi-periodici.
- Moto in potenziale gravitazionale. Moti a energia negativa: periodicità, traiettorie ellittiche e leggi di Keplero. Orbite aperte per il potenziale gravitazionale. Urti tra particelle e diffusione. Sezioni d'urto differenziale e formula di Rutherford.
- L'oscillatore armonico tridimensionale. Teorema di Bertrand (solo enunciato).

#### • MOTI RELATIVI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

- Cambiamento di sistemi di riferimento. Matrici di rotazione in tre dimensioni. Vettore di velocità angolare. Relazione tra la velocità nel sistema di riferimento fisso e quella nel sistema di riferimento mobile. Relazione tra l'accelerazione nel sistema di riferimento fisso e quella nel sistema di riferimento mobile.
- Forze fittizie: forze inerziali, di Coriolis e centrifuga. Il potenziale efficace nel problema dei moti centrali come effetto di un cambiamento di sistema di riferimento adattato alle due particelle. Il pendolo di Foucault. Caduta di un grave in presenza della forza di Coriolis.

#### • SISTEMI RIGIDI

- Corpo rigido: definizione, forze di reazione vincolare e calcolo dell'energia cinetica. Operatore d'inerzia. Corpo rigido nello spazio senza punto fisso (con sistema solidale fissato nel baricentro) e con punto fisso. Quantità di moto e momento angolare di un corpo rigido. Diagonalizzabilità dell'operatore d'inerzia: assi e momenti principali di inerzia. Ellissoide di inerzia e simmetrie. Teorema di Huygens-Steiner
- Equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido. Moto di un corpo rigido in campo gravitazionale: disaccoppiamento del moto del baricentro e del moto di rotazione attorno al baricentro.
- Equazioni di Eulero. Soluzione delle equazioni di Eulero: caso simmetrico (ellissoide d'inerzia di rotazione) e caso generale.
- Angoli di Eulero e descrizione del moto nel sistema di riferimento fisso. Il vettore velocità angolare in termini degli angoli di Eulero. Rotazioni stazionarie. Trottola simmetrica e asimmetrica.
- La trottola pesante: integrabilità del corpo rigido con punto fisso in presenza di gravità. La trottola addormentata e la trottola veloce.

#### Testo principale di riferimento:

- G. Gentile: *Introduzione ai Sistemi Dinamici: 1*, disponibile online su <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2011/testo/testo.html>

#### Testi di riferimento aggiuntivi:

- G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, ed. P. Boringhieri, Torino, 1986. [Versione inglese: *The elements of mechanics*, Springer-Verlag, 1983]
- V.I. Arnold: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979.
- L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976.