FM210 - Fisica Matematica I

Seconda Prova Scritta [16-02-2012]

Soluzioni

Problema 1

1. Chiamiamo A la matrice del sistema e cerchiamo anzitutto gli autovalori della matrice: l'equazione secolare è
$$(\lambda + 2\beta)\lambda + \beta^2 = (\lambda + \beta)^2 = 0,$$
che ha come unica soluzione
$$\lambda_{1,2} = -\beta.$$
Cerchiamo ora gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$: l'equazione $(A + \beta\mathbb{1})\mathbf{v} = 0$ ammette però un'unica soluzione per ogni $\beta \in \mathbb{R}$
$$\mathbf{v}_1 = (1, -\beta)\,,$$
e quindi la matrice non è diagonalizzabile. Cerchiamo allora il secondo vettore della base in cui la matrice è in forma canonica di Jordan come soluzione dell'equazione $(A + \beta\mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ e troviamo, ad es.,
$$\mathbf{v}_2 = (0, 1)\,.$$
Se chiamiamo $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ le coordinate di $\mathbf{x}(t)$ nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, esse risolveranno il sistema di equazioni differenziali
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$
la cui soluzione è
$$x_1'(t) = (x_1'(0) + x_2'(0)t) \exp\{-\beta t\}\,, \qquad x_2'(t) = x_2'(0) \exp\{-\beta t\}\,,$$
e quindi la soluzione generale del sistema si può scrivere
$$\mathbf{x}(t) = (a + bt)\, e^{-\beta t}\mathbf{v}_1 + b e^{-\beta t}\mathbf{v}_2,$$
dove le costanti $a, b \in \mathbb{R}$ sono determinate dai dati iniziali.

2. Il punto di equilibrio $(0, 0)$ è un nodo improprio. Se $\beta > 0$ è un pozzo mentre se $\beta \leq 0$ è una sorgente, quindi nel primo caso è asintoticamente stabile mentre nel secondo instabile.

3. Le traiettorie sul piano (x, y) sono graficate in fig. 1, 2 e 3.

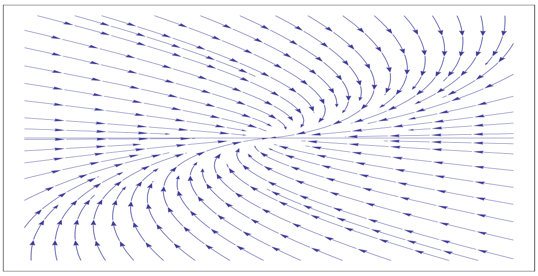

Figura 1: Traiettorie per $\beta > 0$.

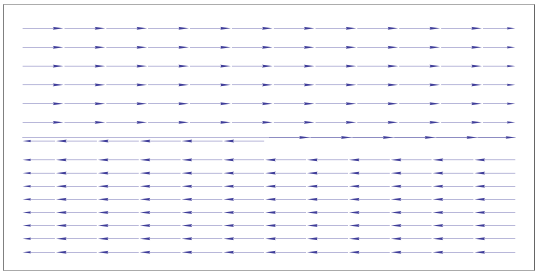

Figura 2: Traiettorie per $\beta = 0$.

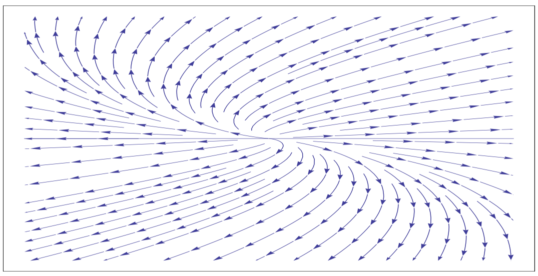

Figura 3: Traiettorie per $\beta < 0$.

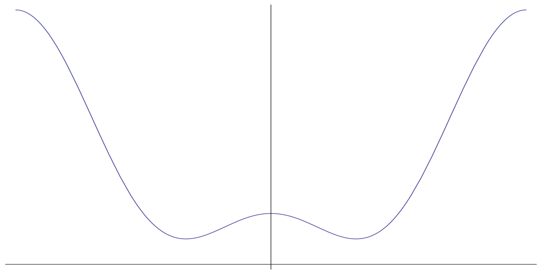

Figura 4: Potenziale $V(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Problema 2

1. L'equazione del moto è
$$m\ddot{x} = -2\sin x + 2\sin 2x,$$
e l'integrale del moto è l'energia meccanica
$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

2. Il potenziale è periodico di periodo 2π per cui si può studiare nell'intervallo $[-\pi, \pi)$.
   (a) Il grafico di $V(x)$ è disegnato in fig. 4.
   (b) Procediamo con l'analisi qualitativa del moto. Il potenziale $V(x)$ ha nell'intervallo $x \in [-\pi, \pi)$ due massimi in $x_0 = -\pi$ e $x_2 = 0$ e due minimi in $x_1 = -\pi/3$ e $x_3 = \pi/3$. I punti di equilibrio in x_0 e x_2 sono instabili mentre quelli in x_1 e x_3 sono stabili per il criterio di Dirichlet.
   Il valore minimo dell'energia corrisponde $V(x_1) = V(x_3) = V(\pm\pi/3) = 1/2$. Gli altri valori significativi sono $V(x_0) = V(-\pi) = 5$ e $V(x_2) = V(0) = 1$. Le orbite sono chiuse e periodiche per $1/2 < E < 1$ e per $1 < E < 5$ e aperte per $E > 5$. Le separatrici sono le curve con energia $E = 1$ e $E = 5$.
   Le curve di livello sono disegnate in fig. 5.

Problema 3

1. Il sistema dinamico si ottiene ponendo $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$:
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \\ m\dot{\mathbf{y}} = -k\left(1 - |\mathbf{x}|^2\right)\mathbf{x} - \gamma|\mathbf{y}|^2\mathbf{y}. \end{cases}$$

2. Le posizioni di equilibrio si ottengono ponendo i membri di destra del sistema uguali a zero e sono date in coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dal punto $P_0 := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e dai punti $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ con $|\mathbf{x}| = 1$ che possiamo anche rappresentare come i punti $P_\alpha = ((\cos\alpha, \sin\alpha), \mathbf{0})$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

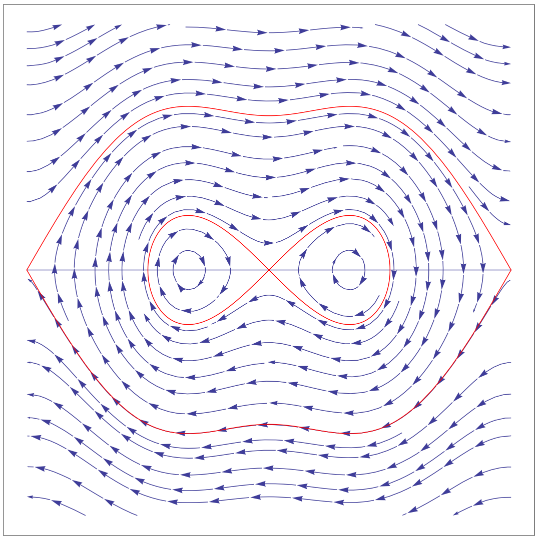

Figura 5: Orbite (in rosso le separatrici).

3. Il sistema linearizzato attorno a $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è della forma $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\frac{k}{m}\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo scritto A in blocchi 2 x 2. Gli autovalori sono soluzioni di

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

ovvero $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$.

4. Il sistema linearizzato non dà informazione poiché gli autovalori sono immaginari puri.

E' perciò necessario applicare il Teorema di Ljapunov e indentificare un'opportuna funzione di Ljapunov. Si noti che il sistema assegnato è un sistema meccanico con una forza conservativa associata al potenziale

$$V(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right)|\mathbf{x}|^2$$

più un termine di attrito non lineare (ovvero $-\gamma|\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}}$): quindi l'energia meccanica rappresenta una buona candidata ad essere una funzione di Ljapunov. L'energia si ottiene sommando energia cinetica ed energia potenziale e in questo caso è

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}m|\mathbf{y}|^2 + V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m|\mathbf{y}|^2 + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right)|\mathbf{x}|^2.$$

Verifichiamo se soddisfa le proprietà di una funzione di Ljapunov. Ovviamente è differenziabile e $H(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Inoltre in un intorno di P_0 (e.g., per $|\mathbf{x}| < \sqrt{2}$) si ha $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ per $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq P_0$. Infine calcoliamo la derivata rispetto al tempo, usando il fatto che $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$:

$$\dot{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m\mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{y}} - k\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + k|\mathbf{x}|^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\gamma|\mathbf{y}|^4 \leq 0$$

e quindi possiamo concludere che le condizioni del Teorema di Ljapunov sono soddisfatte e P_0 è stabile.

5. Il potenziale che compare nell'energia H è centrale, i.e., dipende solo da $r := |\mathbf{x}|$, ed ha un massimo in corrispondenza di $r = 1$, per cui i punti di equilibrio che si trovano sulla circonferenza $r = 1$ sono massimi locali dell'energia potenziale e quindi corrispondono a punti di equilibrio instabili.

Problema 4

1. Scegliamo il sistema di coordinate K con l'origine O' sull'automobile, l'asse η_2 parallelo a $\mathbf{e}_y$ lungo la direttrice AB e l'asse η_3 parallelo a $\mathbf{e}_z$. Se chiamiamo $\mathbf{Q}$ le coordinate in K e $\mathbf{q}$ le coordinate in κ, le leggi di trasformazione sono
$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q} + \mathbf{r}(t),$$
dove $\mathbf{r}(t)$ è la posizione di O' in κ, ovvero
$$\mathbf{r}(t) = \left(0, \tfrac{1}{2}at^2, 0\right).$$
La legge di trasformazione delle velocità è ovviamente
$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{Q}} + (0, at, 0).$$

2. L'unica forza attiva agente sulla pallina è la forza peso $m\mathbf{g}$ mentre la forza fittizia dovuta al movimento di K è $-m\mathbf{a}$. L'equazione di Newton per la pallina è dunque
$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a},$$
con $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ e $\mathbf{a} = (0, a, 0)$ in K.

3. Il dato iniziale $\mathbf{Q}(0) = (0, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{Q}}(0) = (0, 0, v)$ e, ponendo $\mathbf{Q} = (x_1, x_2, x_3)$, le equazioni del moto si scrivono
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 = -a, \\ \ddot{x}_3 = -g, \end{cases}$$
la cui soluzione con il dato iniziale assegnato è
$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + v_1(0)t = 0, \\ x_2(t) = x_2(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}at^2, \\ x_3(t) = x_3(0) + v_3(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

4. Il tempo di volo della pallina è il doppio del tempo che essa impiega ad arrivare al punto di massima altezza ovvero $2t_\star$ con $t_\star$ tale che $\dot{x}_3(t_\star) = 0$. Dalla soluzione delle equazione del moto si ottiene $\dot{x}_3(t) = v - gt$ e quindi
$$t_\star = \frac{v}{g}.$$
Se ne conclude che la distanza percorsa dalla pallina al punto di caduta è
$$|x_2(2t_\star)| = 2at_\star^2 = \frac{2av^2}{g^2}.$$

Problema 5

1. La distribuzione di massa è simmetrica rispetto all'asse x quindi l'asse passante per il centro del disco e ortogonale ad esso è certamente un asse di simmetria di ordine almeno 2. Il centro di massa deve stare su tale asse e quindi coincide con il centro del disco. Il risultato si sarebbe potuto ottenere anche usando la definizione di centro di massa e osservando che, poiché ρ è pari sia in x che in y, $x_{cm} = y_{cm} = 0$ e ovviamente $z_{cm} = 0$ perché il disco ha spessore nullo.

   Per quanto detto sopra un asse principale di inerzia coincide con l'asse passante per il centro del disco e ortogonale ad esso. Gli altri due stanno sul piano del disco ma siccome la distribuzione di massa è simmetrica sia rispetto all'asse x che all'asse y dovranno coincidere con tali assi.

2. I momenti principali di inerzia sono

$$I_1 := I_{xx} = \int_D \mathrm{d}\mathbf{x}\, \rho(x,y)y^2 = \frac{4m}{\pi R^4}\int_0^R \mathrm{d}r\, r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, r^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta = \frac{2mR^2}{3\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \tfrac{1}{4}\left(1-\cos^2 2\vartheta\right)$$
$$= \frac{mR^2}{6\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \tfrac{1}{2}\left(1-\cos 4\vartheta\right) = \tfrac{1}{6}mR^2,$$

$$I_2 := I_{yy} = \int_D \mathrm{d}\mathbf{x}\, \rho(x,y)x^2 = \frac{4m}{\pi R^4}\int_0^R \mathrm{d}r\, r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, r^4 \cos^4\vartheta = \frac{2mR^2}{3\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \tfrac{1}{4}\left(1+\cos 2\vartheta\right)^2$$
$$= \frac{mR^2}{6\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\, \left(\tfrac{3}{2} + 2\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\cos 4\vartheta\right) = \tfrac{1}{2}mR^2,$$

$$I_3 := I_{zz} = \int_D \mathrm{d}\mathbf{x}\, \rho(x,y)(x^2+y^2) = I_{xx} + I_{yy} = \tfrac{2}{3}mR^2.$$

3. Dato che i momenti di inerzia sono tutti differenti, le rotazioni stazionarie sono della forma $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1, 0, 0)$ oppure $\boldsymbol{\Omega} = (0, \omega_2, 0)$ oppure $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega_3)$.