

FM210 - FISICA MATEMATICA I

TERZO APPELLO [15-6-2012]

• **Problema 1 (8 punti).**

Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & -2\beta \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

con  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\beta$  un parametro reale.

1. Si determini la soluzione generale del sistema.
2. Si discuta la stabilità del punto di equilibrio al variare di  $\beta$ .
3. Si disegnino qualitativamente le traiettorie del sistema (con verso di percorrenza) al variare di  $\beta$ .

• **Problema 2 (8 punti).**

Un punto materiale di massa  $m$  si muove sulla retta  $\mathbb{R}$  sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos 2x.$$

1. Scrivere l'equazione del moto e determinare un integrale primo.
2. Si disegnino:
  - (a) il grafico dell'energia potenziale,
  - (b) le curve di livello nel piano  $(x, \dot{x})$e si studi qualitativamente il moto.

• **Problema 3 (6 punti).**

Il moto di un punto materiale di massa  $m$  e coordinate  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  è descritto dalle equazioni del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k(1 - |\mathbf{x}|^2)\mathbf{x} - \gamma|\dot{\mathbf{x}}|^2\dot{\mathbf{x}},$$

con  $k$  e  $\gamma$  parametri reali positivi.

1. Si determini il sistema dinamico associato a tali equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema.
3. Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio  $P_0$  corrispondente a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e si determinino i corrispondenti autovalori.
4. Si discuta la stabilità alla Ljapunov di  $P_0$ .
5. **[Facoltativo]** Si discuta la stabilità alla Ljapunov dei punti di equilibrio diversi da  $P_0$ .

• **Problema 4 (4 punti).**

Un'automobile si muove lungo il percorso rettilineo da  $A$  a  $B$  con accelerazione costante  $a > 0$ , partendo al tempo  $t = 0$  da ferma dal punto  $A$ . Scelto un sistema di riferimento fisso  $\kappa$  con asse  $y$  lungo la direttrice  $AB$ , asse  $z$  lungo la verticale (così che  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ) e asse  $x$  scelto conseguentemente, si scelga un sistema di riferimento mobile  $K$  solidale all'automobile e si calcolino:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ .

Durante il tragitto da  $A$  a  $B$  un passeggero all'interno dell'automobile lancia una pallina di massa  $m$  verso l'alto (nel suo sistema di riferimento).

2. Si scrivano le equazioni del moto della pallina nel sistema di riferimento  $K$ .
3. Si risolvano tali equazioni in corrispondenza del dato iniziale assegnato.
4. **[Facoltativo]** Si dica a che distanza dal punto di lancio ricade la pallina.

• **Problema 5 (4 punti).**

Sia dato un disco inomogeneo di raggio  $R$  e spessore trascurabile la cui massa è distribuita secondo la legge

$$\rho(x, y) = \frac{4mx^2}{\pi R^4}$$

dove  $(x, y)$  denotano le coordinate cartesiane di un punto del disco in un sistema di coordinate con origine nel centro del disco.

1. Si trovino la posizione del centro di massa del corpo rigido e gli assi principali di inerzia.
2. Si calcolino i momenti principali di inerzia [Suggerimento: per calcolare gli integrali coinvolti, si passi in coordinate polari].
3. **[Facoltativo]** Si trovino le rotazioni stazionarie del corpo.