FM210 - Fisica Matematica I

Terza Prova Scritta [7-9-2012]

Soluzioni

Problema 1

1. Chiamando A la matrice del sistema, il punto di equilibrio è dato da

$$\mathbf{x}_e = -A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed esiste solo se la matrice è invertibile. Calcoliamo anzitutto il determinante di A:

$$\det(A) = -2(1+\alpha^2) \neq 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Pertanto la matrice è sempre invertibile e la sua inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & -2 \\ 3\alpha & -1-\alpha^2 & -3 \\ 2 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix},$$

cosicché si ottiene

$$\mathbf{x}_e = \frac{1}{1+\alpha^2} \begin{pmatrix} 1-2\alpha \\ \alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{2} \\ -2-\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Cerchiamo gli autovalori della matrice: l'equazione secolare è

$$-(2+\lambda)(\alpha-\lambda)^2 - (2+\lambda) = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_{2,3} = \alpha \mp i.$$

Se $\alpha < 0$ gli autovalori hanno tuuti parte reale strettamente negativa e il punto di equilibrio è asintoticamente stabile. Se invece $\alpha = 0$ il punto di equilibrio è stabile. Infine se $\alpha > 0$ esistono due autovalori con parte reale strettamente positiva e il punto è instabile.

Problema 2

1. L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -2(3+x)\left(2x^2+3x-2\right),$$

e l'integrale del moto è l'energia meccanica

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

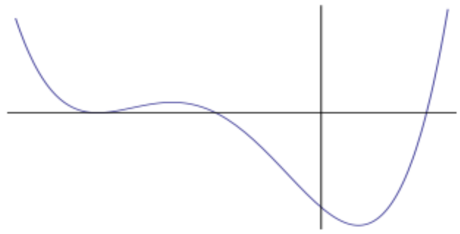

Figura 1: Potenziale $V(x)$.

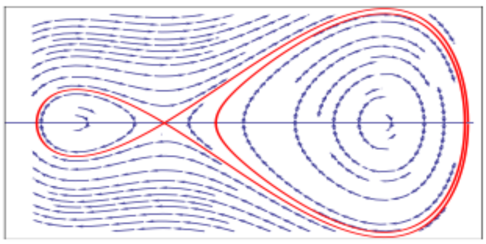

Figura 2: Orbite (in rosso le separatrici).

2. (a) Il grafico di $V(x)$ è disegnato in fig. 1.

   (b) Procediamo con l'analisi qualitativa del moto. Il potenziale $V(x)$ ha un massimo relativo in $x_2 = -2$ e due minimi (il primo relativo e il secondo assoluto) in $x_1 = -3$ e $x_3 = 1/2$. I punti di equilibrio in x_1 e x_3 sono stabili mentre x_2 è instabile per il criterio di Dirichlet. Inoltre $V(x)$ si annulla nei tre punti $x_1 = -3$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

   Il valore minimo dell'energia è $V(x_3)$. Gli altri valori significativi sono $V(x_1) = 0$ e $V(x_2) = 2$. Le orbite sono sempre chiuse e periodiche. Per $V(x_3) < E < 0$ c'è un'unica orbita contenuta in $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Per $0 < E < 2$ ci sono due orbite rispettivamente nelle regioni $x < -2$ e $x > -2$. Per $E > 2$ si torna ad avere un'unica orbita chiusa.

   Le curve di livello sono disegnate in fig. 2.

Problema 3

1. Le posizioni di equilibrio si ottengono ponendo i membri di destra del sistema uguali a zero e sono date in coordinate (r, ϑ) dai punti $P_1 = (r_0, 0)$ e $P_2 = (r_0, \pi)$.

2. Il sistema linearizzato attorno a entrambi i punti di equilibrio non dà informazioni in quanto la matrice è identicamente nulla. Tuttavia è facile dimostrare che entrambe i punti sono di equilibrio instabile. Per esempio si può predere in considerazione l'equazione per la coordinata radiale e osservare che un qualunque dato inziale $r(0) > r_0$ per quanto vicino a r_0 genererebbe una traiettoria che si allontana indefinitamente da r_0: ponendo $x(t) = r(t) - r_0$ si avrebbe infatti $\dot{x} = \omega r_0 x^2$, la cui soluzione è

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - \omega r_0 x(0) t},$$

e, per quanto piccolo sia $x(0) > 0$, si ha comunque $x(t) > 1$ e la soluzione diverge in tempo finito.

Problema 4

1. Scegliamo il sistema di coordinate K con l'origine O' coincidente con la posizione dell'uomo ad ogni tempo $t \geq 0$. Scegliamo inoltre la terna fissa con origine O al centro della piattaforma e in modo che la posizione dell'uomo abbia al tempo $t = 0$ coordinate $(R, 0, 0)$ (assi x e y sul piano della piattaforma, asse z ortogonale al piano, asse x passante per la posizione dell'uomo al tempo $t = 0$). Fissiamo la terna mobile K in modo che gli assi siano paralleli a quelli della terna fissa al tempo $t = 0$. Se chiamiamo $\mathbf{Q}$ le coordinate in K e $\mathbf{q}$ le coordinate in κ, le leggi di trasformazione sono

$$\mathbf{q}(t) = B_t \left(\mathbf{Q}(t) + (R - V_0 t)\mathbf{e}_1 \right),$$

dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ e

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos\beta(t) & -\sin\beta(t) & 0 \\ \sin\beta(t) & \cos\beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta(t) = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

2. Il moto dell'uomo segue una traiettoria a spirale generata dalla sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme in K e della rotazione di K in κ. Poiché la posizione dell'uomo coincide con O' a tutti i tempi, la curva che descrive è descritta dall'equazione $\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$, e quindi (sostituendo tale identità nella relazione generale tra $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$)

$$\mathbf{q}(t) = B_t \left((R - V_0 t)\mathbf{e}_1 \right) = (R - V_0 t) \begin{pmatrix} \cos\beta(t) \\ \sin\beta(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

che è l'equazione in forma parametrica della curva descritta dall'uomo in κ. L'uomo raggiungerà l'origine O al tempo $t_\star$ tale che $\mathbf{q}(t_\star) = \mathbf{0}$, ovvero al tempo

$$t_\star = R/V_0.$$

3. La legge di trasformazione delle velocità è

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B_t \dot{\mathbf{Q}}(t) - V_0 B_t \mathbf{e}_1 + \dot{B}_t \left(\mathbf{Q}(t) + (R - V_0 t)\mathbf{e}_1 \right) = B_t \dot{\mathbf{Q}}(t) - V_0 B_t \mathbf{e}_1 + \omega(t)\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{q}(t).$$

dove $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

Problema 5

1. Scegliamo gli assi coordinati con l'origine in A, l'asse z parallelo alla sbarretta e verso da A a B e gli assi x e y scelti arbitrariamente sul piano ortogonale all'asse z. Si noti che il corpo ha un asse di simmetria di ordine ∞ coincidente con l'asse z: una rotazione di un angolo arbitrario attorno all'asse z lascia il corpo invariante. Pertanto l'asse z sarà anche un asse principale di inerzia e il centro di massa deve necessariamente stare su tale asse. In altri termini la posizione del centro di massa avrà coordinate $\mathbf{r}_{cm} = (0, 0, z_{cm})$ con

$$z_{cm} = \frac{1}{m + M} \left\{ \int_0^\ell \mathrm{d}z \, \frac{m}{\ell} z + M\ell \right\} = \frac{(m + 2M)\ell}{2(m + M)}.$$

2. Per quanto anticipato in precedenza l'asse z è un asse principale di inerzia. Inoltre dato che il suo ordine è maggiore di 2, gli altri due assi si posso scegliere arbitrariamente nel piano ortogonale all'asse z passante per il centro di massa. I corrispettivi momenti di inerzia saranno uguali.
   Usando il fatto che il momento di inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio r rispetto ad un diametro qualsiasi è $\frac{2}{5}Mr^2$, si ottiene immediatamente che

$$I_{zz} = \frac{2}{5}Mr^2,$$

   poiché la sbarretta non contribuisce a tale momento di inerzia. Per il calcolo degli altri due momenti di inerzia è conveniente usare il teorema di Huygens-Steiner: il contributo per esempio a I_{xx} della sfera sarà uguale al momento di inerzia della sfera rispetto a un asse passante per il suo centro $\frac{2}{5}Mr^2$ sommato alla quantità $M(\ell - z_{cm})^2$. Avremo perciò

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_{yy} = \int_0^\ell \mathrm{d}z \frac{m}{\ell} \left(z_{cm} - z\right)^2 + \frac{2}{5}Mr^2 + M(\ell - z_{cm})^2 \\ = \frac{m}{3\ell}\left[\left(\ell - z_{cm}\right)^3 - z_{cm}^3\right] + \frac{2}{5}Mr^2 + M(\ell - z_{cm})^2. \end{aligned}$$