

FM210 - FISICA MATEMATICA I

TERZO APPELLO [7-9-2012]

• **Problema 1 (6 punti).**

Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e α un parametro reale.

1. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema.
2. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio al variare di α .

• **Problema 2 (8 punti).**

Un punto materiale di massa m si muove sulla retta \mathbb{R} sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 2)(x + 3)^2.$$

1. Scrivere l'equazione del moto e determinare un integrale primo.
2. Si disegnino:
 - (a) il grafico dell'energia potenziale,
 - (b) le curve di livello nel piano (x, \dot{x})e si studi qualitativamente il moto.

• **Problema 3 (4 punti).**

Si consideri il sistema dinamico bidimensionale espresso in coordinate polari nella forma

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \frac{r^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \\ \dot{r} = \omega r_0 \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^2, \end{cases}$$

con ω e r_0 parametri positivi.

1. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema.
2. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.

• **Problema 4 (6 punti).**

Una piattaforma circolare di raggio R ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Un uomo parte al tempo $t = 0$ dal bordo e si muove camminando lungo un raggio verso il centro a velocità costante V_0 rispetto alla piattaforma.

Dopo aver fissato un sistema di riferimento fisso κ e uno mobile K solidale con l'uomo si determinino:

1. la legge di trasformazione di coordinate da κ a K ;
2. la curva percorsa dall'uomo in κ e il tempo che gli è necessario per raggiungere il centro.
3. la legge di trasformazione di velocità da κ a K ;

• **Problema 5 (6 punti).**

Si consideri il corpo rigido costituito da una sbarretta uniforme di estremi A e B , lunghezza ℓ , massa m e spessore trascurabile alla cui estremità B è saldata una pallina di massa M e raggio r (la pallina è saldata in modo tale che il suo centro coincida con B), con $r < \ell$.

1. Si trovi la posizione del centro di massa del corpo rigido.
2. Si calcolino i momenti principali di inerzia e i corrispondenti assi [Suggerimento: si ricordi che il momento di inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio r rispetto ad un diametro qualsiasi è $\frac{2}{5}Mr^2$].