

# FM210 - FISICA MATEMATICA I

SECONDA PROVA DI ESONERO [13-01-2012]

## SOLUZIONI

### PROBLEMA 1

1. Il moto si svolge in un campo di forze centrale in assenza di attrito. Pertanto si avranno due integrali primi del moto dati dall'energia e dal momento angolare, ovvero per  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{L} = m\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}.$$

2. La conservazione del vettore momento angolare implica che il moto si svolga su una retta (se  $L = 0$ ) o su un piano ortogonale a  $\mathbf{L}$  (se  $L \neq 0$ ). Scegliendo in entrambi i casi coordinate polari  $(r, \vartheta)$  nel piano ortogonale a  $\mathbf{L}$ , l'energia diventa

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{L^2}{2m} + \alpha \log^2(r/r_0) \right].$$

- (a) Introducendo il parametro

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}m\alpha},$$

si osserva che il comportamento della derivata di  $V_{\text{eff}}$ , i.e.,

$$V'_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2mr^3} [4\beta^2 (\log(r/r_0) - \log^2(r/r_0)) - L^2],$$

varia a seconda del valore di  $L$ : ponendo  $z = \log(r/r_0)$  la derivata si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione

$$z^2 - z + \frac{L^2}{4\beta^2} = 0,$$

che non ha soluzioni se  $L > \beta$  e due soluzioni (coincidenti quando  $L = \beta$ ) date da

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{L^2}{\beta^2}} \right).$$

Per esempio nel caso  $L = 0$  le soluzioni sono  $r_1 = r_0$  e  $r_2 = r_0 e$  mentre se  $L = \beta$  si ha un'unica soluzione  $r_1 = r_2 = r_0 \sqrt{e}$ .

I grafici dell'energia potenziale efficace per diversi valori di  $L$  sono descritti in fig. 1.

- (b) Anche per quanto riguarda l'analisi qualitativa bisogna distinguere vari casi.

Il caso  $L > \beta$  (fig. 2) è il più semplice perché le orbite sono sempre aperte e non ci sono punti di equilibrio. Se invece  $L = \beta$  (fig. 3) esiste un unico punto di equilibrio instabile ma le orbite sono comunque sempre aperte al di fuori del punto di equilibrio. Il caso  $0 \leq L < \beta$  (fig. 4) è invece qualitativamente diverso perché esistono due punti di equilibrio in  $0 < r_1 < r_2$  dati da

$$r_1 = r_0 e^{z_1}, \quad r_2 = r_0 e^{z_2},$$

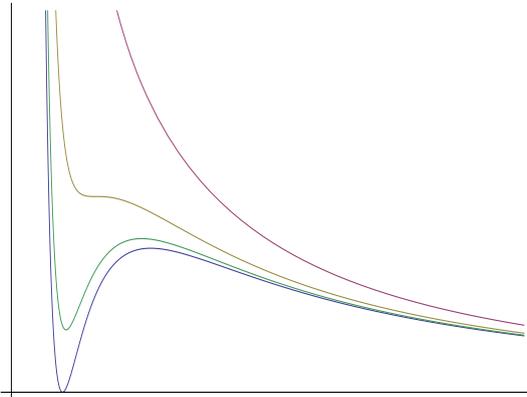


Figura 1: Potenziale efficace  $V_{\text{eff}}(r)$ ,  $r > 0$ , per  $L = 0$  (blu),  $0 < L < \beta$  (verde),  $L = \beta$  (giallo) e  $L > \beta$  (viola).

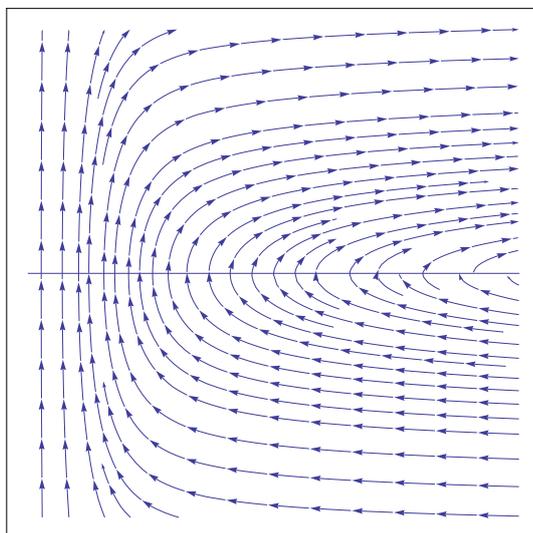


Figura 2: Orbite nel caso  $L > \beta$ .

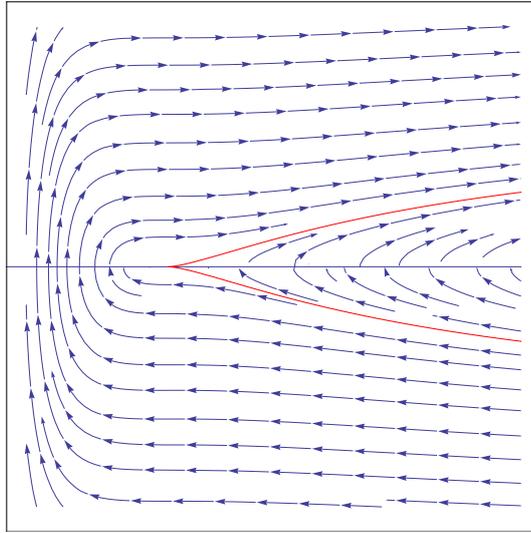


Figura 3: Orbite nel caso  $L = \beta$  con evidenziate le separatrici (rosso).

di cui il primo stabile e il secondo instabile. Pertanto se l'energia soddisfa la condizione

$$V_{\text{eff}}(r_1) < E < V_{\text{eff}}(r_2),$$

sono possibili due traiettorie: l'equazione

$$V_{\text{eff}}(r) = E$$

ammette infatti tre soluzioni  $r_-, r_+, r_m$  che soddisfano  $0 < r_- < r_1 < r_+ < r_2 < r_m$ . Le traiettorie possibili sono un'orbita chiusa per  $r_- \leq r \leq r_+$  e un'altra aperta per  $r \geq r_m$ .

Al contrario se  $E > V_{\text{eff}}(r_2)$  l'orbita è sempre aperta. Inoltre, nel caso  $E = V_{\text{eff}}(r_2)$ , oltre al moto radiale "banale corrispondente a  $r = r_2$ , ci sono due moti aperiodici, l'uno limitato per  $r_- \leq r < r_2$ , e uno aperto per  $r > r_2$ .

3. Il moto può essere periodico soltanto se  $0 \leq L < \beta$  e: (i)

$$V_{\text{eff}}(r_1) < E < V_{\text{eff}}(r_2),$$

e il dato iniziale  $r(0)$  soddisfa  $r_- \leq r(0) \leq r_+$ , dove  $r_{\pm}$  sono i punti di inversione; (ii)  $E = V_{\text{eff}}(r_1)$  e  $r = r_1$ ; (iii)  $E = V_{\text{eff}}(r_2)$  e  $r = r_2$ .

(a) Nel caso  $V_{\text{eff}}(r_1) < E < V_{\text{eff}}(r_2)$ , i punti  $r_{\pm}$  sono le due soluzioni più piccole dell'equazione trascendente

$$\frac{mr^3 E}{2\beta^2} = \log(r/r_0) - \log^2(r/r_0) - \frac{L^2}{4\beta^2}.$$

(b) Nel caso  $V_{\text{eff}}(r_1) < E < V_{\text{eff}}(r_2)$ , il periodo del moto radiale è

$$T = 2 \int_{r_-}^{r_+} d\varrho \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(\varrho)]}}.$$

Invece nei due casi limite  $E = V_{\text{eff}}(r_1)$  o  $E = V_{\text{eff}}(r_2)$ , il periodo del moto radiale è nullo.

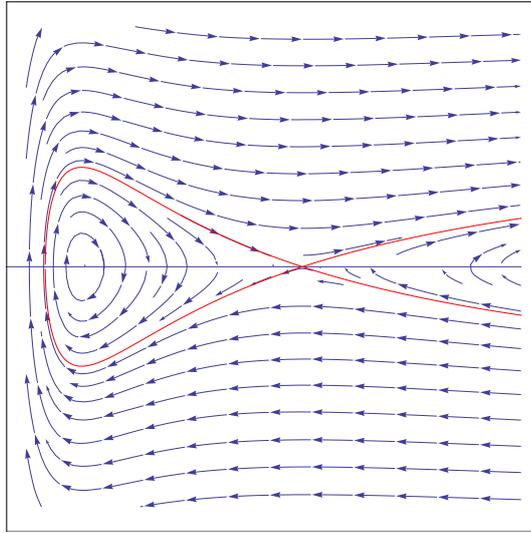


Figura 4: Orbite nel caso  $0 \leq L < \beta$  con evidenziate le separatrici (rosso).

Il moto della variabile angolare  $\vartheta(t)$  si ricava sfruttando la conservazione del momento angolare. Nel caso  $V_{\text{eff}}(r_1) < E < V_{\text{eff}}(r_2)$ , la variazione  $\Delta\vartheta$  di  $\vartheta$  in un periodo del moto radiale sar 

$$\Delta\vartheta = \omega_1 T = 2 \int_{r_-}^{r_+} d\varrho \frac{L}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(\varrho)]}}.$$

Il moto complessivo di  $\vartheta(t)$  sar  una sovrapposizione di due moti periodici di periodo  $T$  e

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi T}{\Delta\vartheta}.$$

Nei due casi limite  $E = V_{\text{eff}}(r_{1,2})$ , la frequenza angolare  $\dot{\theta} = L/(mr_{1,2}^2)$    costante, e quindi il periodo del moto angolare   semplicemente  $T' = 2\pi mr_{1,2}^2/L$ .

## PROBLEMA 2

1. Calcoliamo l'operatore d'inerzia rispetto ad  $O$ . Scegliendo gli assi  $\hat{e}_x$  e  $\hat{e}_y$  lungo i lati della lamina e l'asse  $\hat{e}_z$  ortogonale al piano della lamina in modo che la terna sia destrorsa, avremo che (con  $\rho = m/a^2$  densit  di massa della lamina)

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_{yy} &= \rho \int_0^a dx \int_0^a dy x^2 = \frac{1}{3}ma^2, \\ I_{zz} &= \rho \int_0^a dx \int_0^a dy (x^2 + y^2) = \frac{2}{3}ma^2, \\ I_{xy} = I_{yx} &= -\rho \int_0^a dx \int_0^a dy xy = \frac{1}{4}ma^2, \quad I_{xz} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0, \end{aligned}$$

o in forma matriciale

$$I = \frac{1}{3}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I momenti di inerzia principali sono gli autovalori della matrice: l'equazione caratteristica ha la forma

$$(2 - \lambda) \left[ (1 - \lambda)^2 - \frac{9}{16} \right] = 0,$$

e quindi si ottiene

$$I_1 = \frac{1}{12}ma^2, \quad I_2 = \frac{7}{12}ma^2, \quad I_3 = \frac{2}{3}ma^2.$$

2. Gli assi principali di inerzia  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$  non sono altro che gli autovettori della matrice  $I$  relativi agli autovalori  $I_1, I_2$  e  $I_3$ . Dopo un semplice calcolo si ottiene che gli assi principali sono identificati nel sistema di coordinate scelto in precedenza dai versori unitari

$$\hat{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \hat{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \quad \hat{\eta}_3 = (0, 0, 1).$$

Anziché cercare gli assi di inerzia in questo modo, si sarebbe potuto procedere osservando che la lamina ha un asse di simmetria di ordine 2 che coincide con la diagonale principale passante per  $O$ . Il corpo rigido è infatti invariante per rotazioni di angolo  $n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , attorno a tale asse. Pertanto un asse di inerzia deve coincidere con questo asse di simmetria.

Inoltre il corpo rigido è bidimensionale e quindi l'asse passante per  $O$  ortogonale al piano della lamina è un altro asse di inerzia, come si ottiene facilmente osservando che  $\mathbf{e}_z$  è un autovettore di  $I$ .

Il terzo asse di inerzia va infine scelto in modo da formare una terna ortogonale destrorsa.

Si noti che, se si fossero identificati preliminarmente gli assi di inerzia, si sarebbero potuti calcolare i momenti di inerzia più rapidamente ovvero calcolando i momenti di inerzia rispetto ad una terna passante per il baricentro (centro della lamina) data dalle due diagonali principali e dall'asse ortogonale alla lamina e quindi applicando il teorema di Huygens-Steiner.

3. Visto che i tre momenti principali di inerzia sono diversi, le uniche rotazioni stazionarie sono quelle attorno agli assi di inerzia e quindi con  $\boldsymbol{\Omega}$  dato nel sistema  $K$  da  $(\omega, 0, 0)$ ,  $(0, \omega, 0)$  oppure  $(0, 0, \omega)$  per un certo  $\omega \in \mathbb{R}$ .
4. Le equazioni di Eulero in  $K$  sono

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= -\Omega_2\Omega_3, \\ \dot{\Omega}_2 &= \Omega_1\Omega_3, \\ \dot{\Omega}_3 &= -\frac{3}{4}\Omega_1\Omega_2. \end{aligned}$$

5. Il corpo rigido si muove in assenza di forze esterne pertanto le quantità conservate sono l'energia e il modulo del momento angolare ovvero

$$E = \frac{1}{24}ma^2 (\Omega_1^2 + 7\Omega_2^2 + 8\Omega_3^2), \quad L^2 = \frac{1}{144}m^2a^4 (\Omega_1^2 + 49\Omega_2^2 + 64\Omega_3^2).$$

6. Affinché sia aperiodica la traiettoria deve svolgersi sulla separatrice contenente un punto di equilibrio instabile e non descrivere una rotazione attorno ad un asse di inerzia. Dato che i momenti di inerzia sono diversi le rotazioni attorno a  $\hat{\eta}_1$  e  $\hat{\eta}_3$  (momenti di inerzia più piccolo e più grande) sono stabili mentre quella attorno a  $\hat{\eta}_2$  (momento di inerzia mediano) è instabile. Affinché il moto avvenga sulla separatrice associata a tale punto di equilibrio deve essere

$$L = \sqrt{2I_2E},$$

e al contempo  $\Omega(0)$  non deve essere lungo  $\hat{\eta}_2$ .

Il dato iniziale è tale che la seconda condizione è banalmente soddisfatta dato che  $\Omega(0) \cdot \hat{\eta}_2 = 0$ . Inoltre calcoliamo

$$E = \frac{1}{24} m a^2 (4 + 24) = \frac{7}{6} m a^2, \quad L^2 = \frac{1}{144} m^2 a^4 (4 + 192) = \frac{49}{36} m^2 a^4,$$

così che  $2I_2 E = L^2$ . Il moto sarà asintotico ad uno dei due punti di equilibrio instabile  $(0, \pm 2/(a\sqrt{m}), 0)$  e, per capire qual è il segno corretto, è sufficiente osservare che, con il dato iniziale scelto,  $\dot{\Omega}_2(0) > 0$ , per cui  $\Omega_2(t)$  è crescente e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = \left(0, \frac{2}{a\sqrt{m}}, 0\right).$$

### PROBLEMA 3

1. Assumendo che il pendolo sia sospeso ad un'altezza  $h$  dal pavimento del vagone e schematizzando il vagone come un rettangolo possiamo scegliere i sistemi di riferimento  $\kappa = (O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  e  $K = (O', \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$  in modo che il moto del vagone avvenga lungo  $\hat{e}_1$  e  $\hat{\eta}_1$  sia parallelo a  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_3$  e  $\hat{\eta}_3$  siano diretti lungo la verticale e gli assi  $\hat{e}_2$  e  $\hat{\eta}_2$  siano scelti conseguentemente. Possiamo inoltre scegliere  $O'$  in modo che la posizione del punto di sospensione del pendolo nel sistema  $K$  abbia coordinate  $(0, 0, h)$  e al tempo  $t = 0$   $O'$  coincida con  $O$ .

Con questa scelta la posizione  $\mathbf{r}(t)$  di  $O'$  in  $\kappa$  e la sua velocità  $\mathbf{v}(t)$  sono date da (assumendo  $a > 0$ )

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2} a t^2, 0, 0\right), \quad \mathbf{v}(t) = (a t, 0, 0).$$

Le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità sono (con  $\mathbf{Q}$  coordinate in  $K$  e  $\mathbf{q}$  coordinate in  $\kappa$ ):

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t), \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{v}(t).$$

2. La legge di Newton per la massa  $m$  si scrive

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{g} - m\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{T},$$

dove le tre forze sono rispettivamente la forza peso, la forza apparente e la tensione dell'asta. Il moto avviene sul piano  $Q_2 = 0$  e proiettando in direzione ortogonale all'asticella, ovvero ponendo  $Q_1 = l \sin \vartheta$  e  $Q_3 = h - l \cos \vartheta$  con  $\vartheta$  crescente in direzione oraria, otteniamo

$$\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{e} = \mathbf{g} \cdot \hat{e} - \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \hat{e},$$

dove  $\hat{e} = (\cos \vartheta, 0, \sin \vartheta)$ ,

$$\ddot{\mathbf{Q}} = l \left( -\sin \vartheta \ddot{\vartheta} + \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2, 0, \cos \vartheta \ddot{\vartheta} + \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2 \right),$$

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (a, 0, 0)$  e abbiamo sfruttato il fatto che la tensione dell'asta è diretta lungo l'asta. Si ha perciò

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta - \frac{a}{l} \cos \vartheta = -A \sin(\vartheta + \alpha), \quad A = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{g},$$

che sono identiche alle equazioni del pendolo semplice eccetto che per la traslazione  $\alpha$ .

3. Le posizioni di equilibrio hanno coordinate  $(\vartheta, \dot{\vartheta})$  date da  $(0, -\alpha)$  e  $(\pi - \alpha, 0)$ . Si noti che per ogni  $0 \leq a < \infty$  si ha  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Studiando il sistema linearizzato si vede facilmente che il punto di equilibrio  $(-\alpha, 0)$  è sempre stabile mentre  $(\pi - \alpha, 0)$  è instabile proprio come nel caso del pendolo semplice in cui  $(0, 0)$  è stabile e  $(\pi, 0)$  instabile.

4. Come nel caso del pendolo semplice l'energia totale si conserva. L'integrale primo è perciò dato da

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml^2A[1 - \cos(\vartheta + \alpha)],$$

dove abbiamo normalizzato il potenziale in modo che sul punto di equilibrio stabile  $(-\alpha, 0)$  si abbia  $E = 0$ .

5. Le condizioni iniziali sono  $(\vartheta(0), \dot{\vartheta}(0)) = (0, 0)$  e l'energia

$$E = ml^2A(1 - \cos \alpha).$$

Per analogia con quanto noto nel caso del pendolo semplice, il corpo compirà delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio  $\vartheta = -\alpha$  di ampiezza  $\alpha$  (ovvero  $-2\alpha \leq \vartheta \leq 0$ ) e periodo

$$T = 2 \int_{-2\alpha}^0 d\vartheta \frac{1}{\sqrt{2A[\cos(\vartheta + \alpha) - \cos \alpha]}}.$$