FM210 - Fisica Matematica I

Seconda Prova Scritta [16-02-2012]

Soluzioni

Problema 1

1. Il punto di equilibrio del sistema è $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   Per studiare la stabilità, cerchiamo gli autovalori della matrice: l'equazione secolare è
   $$(2+\lambda)(1-\lambda)\lambda - 4\lambda - 2 = (\lambda^2+2)(1+\lambda) = 0,$$
   che ha come soluzioni
   $$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}i.$$
   I tre autovalori sono tali che $\Re(\lambda_i) \le 0$ ma $\Re(\lambda_{2,3}) = 0$, quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è stabile (ma *non* asintoticamente stabile).

2. Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ i tre autovettori associati agli autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 (si noti che $\mathbf{v}_1$ può essere scelto a coefficienti reali, mentre $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono necessariamente a coefficienti complessi). La soluzione generale del problema assegnato è:
   $$\mathbf{x}(t) = \alpha_1\mathbf{v}_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-i\sqrt{2}t}\mathbf{v}_2 + \alpha_3 e^{i\sqrt{2}t}\mathbf{v}_3,$$
   dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono parametri che vanno fissati in funzione del dato iniziale (x_0, y_0, z_0), i.e., in modo tale che $\mathbf{x}(0) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = (x_0, y_0, z_0)$. Da tale espressioneè evidente che $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t)$ esiste se e solo se $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, nel qual caso $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. I dati iniziali corrispondenti a tale scenario sono tutti e soli i vettori della forma $(x_0, y_0, z_0) = \alpha_1\mathbf{v}_1$, con α_1 un parametro reale arbitrario e $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -4)$, come segue da un semplice calcolo.

Problema 2

1. Il sistema dinamico si ottiene ponendo $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$:
   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \\ m\dot{\mathbf{y}} = \frac{V_0}{r_0^2}\left[\left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^3 - \left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^2\right]\mathbf{x} - \nu|\mathbf{x}|^2\mathbf{y}. \end{cases}$$

2. Le posizioni di equilibrio si ottengono ponendo i membri di destra del sistema uguali a zero e sono date in coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dal punto $P_0 := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e dai punti $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ con $|\mathbf{x}| = r_0$.

3. Il sistema linearizzato attorno a $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è della forma $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$ e
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   dove abbiamo scritto A in blocchi 2 x 2. Gli autovalori sono ovviamente $\lambda_{1,2,3,4} = 0$.

4. Il sistema linearizzato non dà informazione poiché gli autovalori sono tutti nulli.

   E' perciò necessario applicare il Teorema di Ljapunov e indentificare un'opportuna funzione di Ljapunov. Si noti che il sistema assegnato è un sistema meccanico con una forza conservativa associata al potenziale $V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{5}V_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^5 + \frac{1}{4}V_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^4$ piú un termine di attrito non lineare (ovvero $-\nu|\mathbf{x}|^2\dot{\mathbf{x}}$): quindi l'energia meccanica rappresenta una buona candidata ad essere una funzione di Ljapunov. L'energia si ottiene sommando energia cinetica ed energia potenziale e in questo caso: è

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}m|\mathbf{y}|^2 + V(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}m|\mathbf{y}|^2 - \tfrac{1}{5}V_0\left(\tfrac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^5 + \tfrac{1}{4}V_0\left(\tfrac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^4.$$

   Verifichiamo se soddisfa le proprietà di una funzione di Ljapunov. Ovviamente è differenziabile e $H(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$. Inoltre in un intorno di P_0 (e.g., per $|\mathbf{x}| \le r_0$) si ha $H(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$ per $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ne P_0$. Infine calcoliamo la derivata rispetto al tempo, usando il fatto che $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$:

$$\dot{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = m\mathbf{y}\cdot\dot{\mathbf{y}} - \tfrac{V_0}{r_0^2}\left(\tfrac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^3\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \tfrac{V_0}{r_0^2}\left(\tfrac{|\mathbf{x}|}{r_0}\right)^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\nu|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \le 0$$

   e quindi possiamo concludere che le condizioni del Teorema di Ljapunov sono soddisfatte e P_0 è stabile.

5. Il potenziale che compare nell'energia H è centrale, i.e., dipende solo da $r := |\mathbf{x}|$, ed ha un massimo in corrispondenza di $r = r_0$, per cui i punti di equilibrio che si trovano sulla circonferenza $r = r_0$ sono massimi locali dell'energia potenziale. Come dimostrato a lezione, dall'analisi del linearizzato si trova che tutti questi massimi locali corrispondono a punti di equlibrio instabili (a lezione abbiamo dimostrato tale affermazione in presenza di un termine di attrito lineare, ma è immediato verificare che la stessa dimostrazione rimane valida in presenza dell'attrito non lineare considerato in questo problema).

Problema 3

1. L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = \frac{1}{x^3}\left(1 - 2e^{-\frac{1}{x^2}}\right),$$

   e l'integrale del moto è l'energia meccanica

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

2. Il grafico di $V(x)$ e le orbite sono disegnate nelle fig. 1 e 2.

   In particolare, il sistema dinamico (espresso in termini delle variabili $(x,y) = (x,\dot{x})$) ammette un solo punto di equilibrio stabile $(x_0, 0)$, con $x_0 = (\log 2)^{-1/2}$ la posizione del minimo assoluto dell'energia potenziale. Dallo studio del grafico di $V(x)$ risulta evidente che per $\frac{1}{2}(\log 2{+}1) = V(x_0) < E < V_\infty = 1$ le orbite sono chiuse e i moti corrispondenti sono periodici; per $E \ge V_\infty$ le orbite sono aperte e l moti corrispondenti sono aperiodici (il caso $E = V_\infty$ corrisponde al moto sulla separatrice, che si distingue dai casi $E > V_\infty$ per il fatto che la particella arriva all'infinito con velocità nulla invece che positiva).

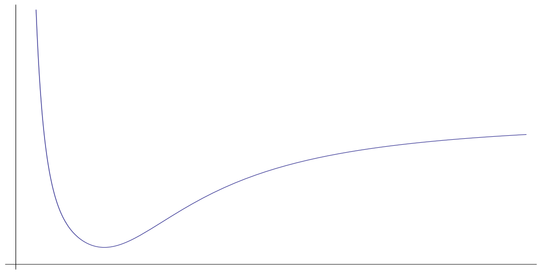

Figura 1: Potenziale $V(x)$, $x > 0$.

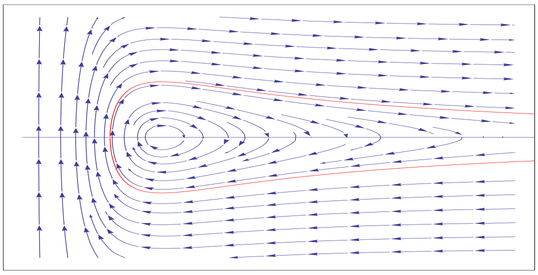

Figura 2: Orbite.

Problema 4

1. Scegliamo il sistema di coordinate κ con l'origine al centro della piattaforma, l'asse $\hat{e}_3$ ortogonale al piano della piattaforma e gli assi $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ scelti in modo che al tempo $t = 0$ il sedile abbia coordinate $\mathbf{q}(0) = (R_0, 0, 0)$ nel sistema κ. Il sistema solidale lo prendiamo con l'origine nel punto in cui si trova il sedile, asse $\hat{\eta}_3$ parallelo a $\hat{e}_3$ e assi $\hat{\eta}_1$ e $\hat{\eta}_2$ scelti in modo che ruotino solidalmente alla piattaforma e al tempo $t = 0$ si abbia $\hat{\eta}_i = \hat{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Assumiamo che la rotazione della piattaforma avvenga in senso antiorario.
   Se chiamiamo $\mathbf{Q}$ le coordinate in K e $\mathbf{q}$ le coordinate in κ, le leggi di trasformazione sono
   $$\mathbf{q}(t) = B_t\mathbf{Q} + \mathbf{r}(t),$$
   dove B_t è una rotazione di un angolo ωt attorno a $\hat{\eta}_3$, i.e,
   $$B_t = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(t) = B_t\mathbf{R}_0\ ,$$
   dove
   $$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Chiamando $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}$, la legge di trasformazione delle velocità è
   $$\mathbf{v}(t) = B_t\mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\omega} \wedge \big(\mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)\big) + \dot{\mathbf{r}}(t)\ ,$$

dove $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{e}_3$. Nel nostro caso, usando la forma esplicita di $\mathbf{r}(t)$, si vede immediatamente che $\dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}(t)$, cosicché

$$\mathbf{v}(t) = B_t \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}(t) \; .$$

3. Le forze fittizie in K che agiscono su una massa m sono la forza di inerzia

$$\mathbf{F}_{inerzia} = -m\mathbf{A} \; ,$$

dove $\mathbf{A}(t) = B_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}_0$, la forza centrifuga e la forza di Coriolis:

$$\mathbf{F}_{centrifuga} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{F}_{Coriolis} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t).$$

Si noti che la forza inerziale di rotazione è nulla, semplicemente perché $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$. Combinando i tre contributi sopra, troviamo che la forza fittizia totale in K è

$$\mathbf{F}_{fittizia} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{R}_0 + \mathbf{Q}) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}.$$

Problema 5

Fissiamo un sistema di coordinate in modo che l'asse x coincida con uno spigolo di base della piramide di lunghezza 2ℓ, che l'asse y coincida con un altro spigolo e l'asse z sia ortgonale agli altri due. Con questa scelta i vertici di base hanno coordinate cartesiane

$$\mathbf{x}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{x}_2 = (2\ell,0,0), \qquad \mathbf{x}_3 = (2\ell,\ell,0), \qquad \mathbf{x}_4 = (0,\ell,0),$$

dove i vertici sono stati numerati in senso antiorario. Il vertice all'apice della piramide avrà invece coordinate

$$\mathbf{x}_5 = \left(\ell, \tfrac{1}{2}\ell, 3\ell\right) .$$

In questo sistema di riferimento, il centro di massa ha coordinate

$$\mathbf{x}_{\text{cm}} = \tfrac{1}{6m}\left[m \textstyle\sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i + 2m\mathbf{x}_5\right] = \left(1, \tfrac{1}{2}, 1\right)\ell.$$