

FM210 - FISICA MATEMATICA I

SECONDO APPELLO [16-2-2012]

• **Problema 1 (6 punti).**

Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità alla Ljapunov.
2. Si stabilisca per quali dati iniziali esiste il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t)$ e lo si calcoli.

• **Problema 2 (7 punti).**

Il moto di un punto materiale di massa m e coordinate $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è descritto dalle equazioni del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{V_0}{r_0^2} \mathbf{x} \left[\left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0} \right)^3 - \left(\frac{|\mathbf{x}|}{r_0} \right)^2 \right] - \nu |\mathbf{x}|^2 \dot{\mathbf{x}},$$

con V_0, r_0 e ν tre parametri positivi.

1. Si determini il sistema dinamico associato a tali equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema.
3. Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno al punto di equilibrio P_0 corrispondente a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e si determinino i corrispondenti autovalori.
4. Si discuta la stabilità alla Ljapunov di P_0 .
5. **[Facoltativo]** Si discuta la stabilità alla Ljapunov dei punti di equilibrio diversi da P_0 .

• **Problema 3 (8 punti).**

Un punto materiale di massa m si muove sulla semiretta $(0, +\infty)$ sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

1. Scrivere l'equazione del moto e determinare un integrale primo del moto.
2. Si studi qualitativamente il moto, al variare di tale integrale primo.

• **Problema 4 (6 punti).**

Una piattaforma circolare ruota attorno al suo asse a velocità angolare costante ω . A distanza R_0 dall'asse si trova un sedile, immobile rispetto alla piattaforma. Dopo aver scelto un sistema di coordinate fisso κ e uno mobile K (solidale con il sedile), si calcolino:

1. la legge di trasformazione di coordinate da κ a K ;
2. la legge di trasformazione di velocità da κ a K ;
3. [Facoltativo] le forze fittizie in K dovute al moto di K rispetto a κ .

• **Problema 5 (3 punti).**

Si calcoli la posizione del centro di massa di una molecola rigida costituita da 5 atomi ai vertici di una piramide retta a base rettangolare (lati di base: ℓ e 2ℓ ; altezza: 3ℓ ; massa degli atomi ai vertici del rettangolo di base: m ; massa dell'atomo all'apice della piramide: $2m$).