Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/12

FM210 - Fisica Matematica I

Secondo esonero [13-1-2012]

- **Problema 1 (14 punti).** Una particella di massa m si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $V(r)$:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} V(|\mathbf{x}|)$$

con

$$V(r) = \alpha \frac{\log^2(r/r_0)}{r^2}$$

e $\alpha, r_0 > 0$.

1. Si determinino gli integrali primi del moto.
2. Si disegnino:
   (a) il grafico del potenziale efficace;
   (b) le curve di livello nel piano $(r, \dot{r})$
   e si studi qualitativamente il moto radiale.
3. Si dica se ed eventualmente per quali valori delle grandezze conservate e dei parametri del sistema il moto radiale è periodico e in tal caso si calcolino:
   (a) i punti di inversione (i.e., le distanze di massimo avvicinamento e allontanamento dal centro);
   (b) i periodi del moto radiale e del moto angolare in termini di due integrali definiti.

- **Problema 2 (8 punti).** Sia data una lamina piana quadrata omogenea di massa m e di lato a. La lamina è rigida e sospesa ad un suo vertice, che chiamaremo $\mathbf{O}$. Il moto della lamina attorno al punto fisso $\mathbf{O}$ è descritto dalla seconda equazione cardinale della dinamica in assenza di forze esterne.

1. Si calcolino i momenti principali di inerzia $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ del corpo rispetto a $\mathbf{O}$.
2. Si determinino i corrispondenti assi principali di inerzia $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$.
3. Si determinino i valori della velocità angolare corrispondenti a rotazioni stazionarie.
4. Si scrivano le equazioni di Eulero per le componenti della velocità angolare $\mathbf{\Omega}(t)$ nel sistema di riferimento $K = (\mathbf{O}; \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ solidale con la lamina.
5. **[Facoltativo]** Si determinino gli integrali primi per tali equazioni.
6. **[Facoltativo]** Si verifichi che la soluzione $\mathbf{\Omega}(t)$ alle equazioni di Eulero con dato iniziale $\mathbf{\Omega}(0) = (2, 0, \sqrt{3})$ rad/s è aperiodica e si calcoli $\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Omega}(t)$.

- **Problema 3 (8 punti).** Su un vagone di un treno è sospeso un pendolo costituito da un'asticella rigida leggera di lunghezza l e da una massa puntiforme m fissata alla sua estremità. Il pendolo è vincolato ad oscillare su un piano verticale parallelo alle pareti laterali del vagone. Inizialmente, il vagone è fermo. All'istante $t = 0$ il treno inizia a muoversi di moto rettilineo ad accelerazione costante a.

  1. Dopo aver scelto un sistema di fisso κ e un sistema mobile K, solidale con il vagone del treno, si determinino la legge di trasformazione delle coordinate e delle velocità da κ a K.
  2. Si determini l'equazione del moto cui è soggetta la massa m nel sistema di riferimento K. Si esprima tale equazione in termini dell'angolo θ che il pendolo forma con la verticale e della sua derivata seconda $\ddot{\theta}$.
  3. Si determinino i punti di equilibrio per il moto del pendolo in K e se ne studi la stabilità.
  4. **[Facoltativo]** Si determini un integrale primo associato al moto del pendolo in K.
  5. **[Facoltativo].** Si studi qualitativamente il moto del pendolo in K in corrispondenza del dato iniziale corrispondente al pendolo in quiete in posizione verticale.