

## FM210 - FISICA MATEMATICA I

SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA PRE-ESONERO [19-12-2011]

1. Un corpo di massa  $m$  si muove in  $\mathbb{R}^2$  sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale  $V(|\mathbf{x}|)$ :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -V'(|\mathbf{x}|)$$

con

$$V(r) = -V_0 \frac{R^2}{r^2 + R^2}$$

e  $V_0 > 0$ .

- Si trovino due integrali primi del moto;
- Si analizzi qualitativamente il moto radiale, ovvero si trovino i punti di equilibrio, si disegnino le curve di livello e le orbite nel piano  $(r, \dot{r})$ ;
- Si dica se ed eventualmente per quali valori delle grandezze conservate e dei parametri del sistema il moto è aperto e in tal caso si calcoli la distanza di massimo avvicinamento al centro;
- Si dica se ed eventualmente per quali valori delle grandezze conservate e dei parametri del sistema il moto radiale è periodico e se ne calcolino i punti di inversione e il periodo;
- Si trovino le condizioni sulle grandezze conservate e i parametri del sistema tali che il moto complessivo del corpo sia periodico.

### Soluzione:

- Osserviamo che il sistema è conservativo e il potenziale è centrale per cui si conservano sia l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(|\mathbf{x}|),$$

che il momento angolare

$$\mathbf{L} = m\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}.$$

Ponendo  $L = |\mathbf{L}|$  si possono avere due casi: se  $L = 0$  il moto avviene lungo una retta mentre se  $L \neq 0$  la conservazione del vettore  $\mathbf{L}$  implica che il moto si svolge nel piano ortogonale a  $\mathbf{L}$ . Scegliendo l'asse  $\hat{z}$  del sistema di coordinate lungo  $\mathbf{L}$  e, passando a coordinate polari  $(r, \vartheta)$  sul piano  $\hat{x}, \hat{y}$ , le due grandezze conservate diventano

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad L = mr^2\dot{\vartheta},$$

dove

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{V_0R^2}{R^2 + r^2}.$$

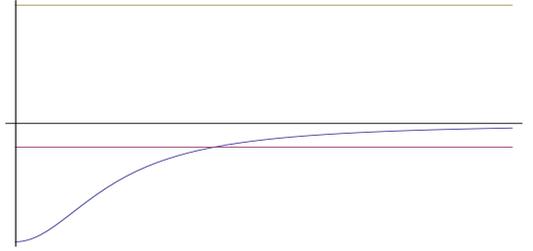


Figura 1: Grafico della funzione  $V(r)$ ,  $r \geq 0$ .

(b) Vanno distinti i due possibili casi  $L = 0$  e  $L \neq 0$ .

Se  $L = 0$  il moto si svolge lungo una retta identificata da un versore  $\hat{k}$  che viene determinato dalle condizioni iniziali e in particolare della posizione del corpo al tempo  $t = 0$ . Notare che perché possa essere  $L = 0$  la velocità al tempo  $t = 0$  deve essere puramente radiale.

Il problema si riduce dunque allo studio di un moto unidimensionale nell'energia potenziale  $V(r)$  (vedi Fig.1). L'energia  $E$  deve essere maggiore di  $-V_0$  che è il minimo del potenziale e il moto cambia a seconda se  $E$  è positiva o negativa.

Se  $E \geq 0$  il moto è aperto e, se la velocità al tempo  $t = 0$  è positiva, il corpo si allontana indefinitamente dall'origine, arrivando all'infinito in un tempo infinito. Al contrario se la velocità iniziale è negativa il corpo cade sul centro della forza, ma l'energia potenziale è differenziabile a  $r = 0$  con derivata continua, il che garantisce l'esistenza del moto per tempi successivi. Si noti però che la singolarità delle coordinate polari all'origine produce un salto nella coordinata  $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + \pi$  quando il corpo attraversa l'origine.

Se invece  $E < 0$  qualunque sia il segno della velocità al tempo  $t = 0$ , il moto è periodico e avviene sul segmento  $[-r_0, r_0]$  sulla retta (oppure tra i punti  $(r_0, \vartheta_0 + \pi)$  e  $(r_0, \vartheta_0)$  in coordinate polari), con  $r_0$  dato da

$$r_0 = R \sqrt{\frac{V_0}{|E|} - 1}.$$

Il periodo del moto  $T_0$  è

$$T_0 = 4 \int_0^{r_0} dr \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r))}},$$

dove si è usato il fatto che le orbite sono simmetriche rispetto all'origine.

Le orbite sono disegnate in Fig.2.

Se invece  $L \neq 0$ , il moto radiale avviene sulla semiretta  $r \geq 0$  con potenziale  $V_{\text{eff}}(r)$  (graficato in Fig.3).

Il comportamento della funzione  $V_{\text{eff}}(r)$  dipende dai parametri  $m, V_0, R$  e dal valore di  $L$  e, in particolare, ponendo

$$\alpha := \sqrt{2mV_0}R,$$

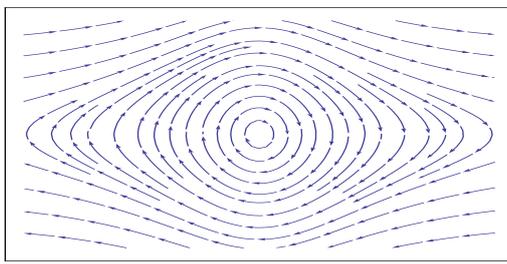


Figura 2: Orbite del moto radiale per  $L = 0$  nel piano  $(r, \dot{r})$  con  $r \in \mathbb{R}$  coordinata lungo la retta su cui si svolge il moto.

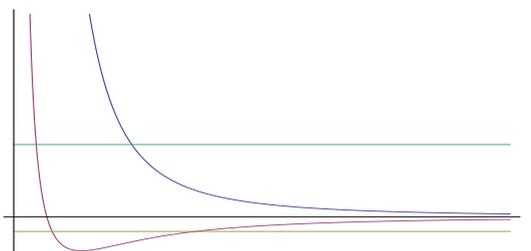


Figura 3: Grafico della funzione  $V_{\text{eff}}(r)$ ,  $r \geq 0$  nei casi  $L \geq \alpha$  (linea blu) e  $L < \alpha$  (linea viola).

se  $L \geq \alpha$ , la funzione è monotona decrescente, positiva e tendente all'infinito per  $r \rightarrow 0$  e a 0 per  $r \rightarrow \infty$ , come segue dall'analisi della derivata

$$V'_{\text{eff}}(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{2V_0R^2r}{(R^2 + r^2)^2}.$$

Se invece  $L < \alpha$ , la funzione è decrescente per  $r < r_*$ , crescente per  $r > r_*$  ed ha un minimo  $V_{\text{eff}}(r_*) = V_*$  con

$$r_* = \sqrt{\frac{2mR^2 + \sqrt{4m^2R^4 + (\alpha^2 - L^2)L^2}}{\alpha^2 - L^2}}.$$

Le orbite nei casi  $L \geq \alpha$  e  $L < \alpha$  sono disegnate rispettivamente in Fig.4 e Fig.5.

- (c) Il moto radiale è aperto per ogni valore  $E > 0$  nel caso  $L \geq \alpha$  e per ogni  $E \geq 0$  se  $0 < L < \alpha$ . La distanza di massimo avvicinamento al centro coincide con il raggio  $r$  al tempo 0 se  $\dot{r}$  è positiva a  $t = 0$ , mentre nel caso in cui  $\dot{r} < 0$ , il massimo avvicinamento si ha in corrispondenza del punto di inversione dell'orbita dove  $\dot{r} = 0$ , ovvero

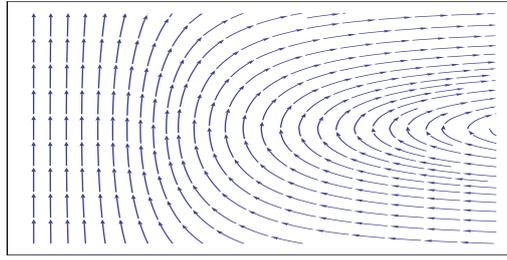


Figura 4: Orbite del moto radiale nel caso  $L \neq 0$  e  $L \geq \alpha$ .

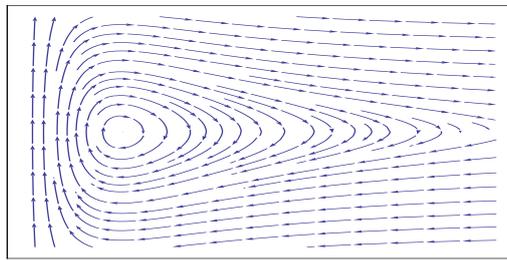


Figura 5: Orbite del moto radiale nel caso  $L \neq 0$  e  $L < \alpha$ .

per  $r = r_o$  soluzione di  $E = V_{\text{eff}}(r_o)$ ,

$$r_o^2 = \frac{1}{4mE} \left\{ -2mER^2 - \alpha^2 + L^2 + \sqrt{4m^2E^2R^4 + (\alpha^2 - L^2)^2 + 4mER^2(\alpha^2 + L^2)} \right\},$$

dove abbiamo assunto  $E > 0$ . Nel caso  $L < \alpha$  e  $E = 0$  l'espressione di  $r_o$  diventa

$$r_o = \frac{LR}{\sqrt{\alpha^2 - L^2}}.$$

- (d) Il moto radiale è periodico per  $V_* < E < 0$  e  $L < \alpha$  e avviene fra i punti di inversione  $r_- < r_+$  dati da

$$r_{\pm}^2 = \frac{1}{4m|E|} \left\{ -2m|E|R^2 + \alpha^2 - L^2 \pm \sqrt{4m^2E^2R^4 + (\alpha^2 - L^2)^2 - 4m|E|R^2(\alpha^2 + L^2)} \right\}.$$

Il periodo  $T_0$  del moto radiale è

$$\begin{aligned} T_0 &= 2 \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}} \\ &= \int_{r_-^2}^{r_+^2} dz \frac{\sqrt{z + R^2}}{\sqrt{2mEz(z + R^2) - L^2(z + R^2) + \alpha^2 z^2}}. \end{aligned}$$

- (e) Il moto complessivo è periodico se  $L < \alpha$  e  $E = V_*$  ovvero il corpo si trova nella posizione di equilibrio radiale  $r = r_*$ .  
Altrimenti se  $L < \alpha$  e  $V_* < E < 0$  il moto complessivo è periodico se la variazione della coordinata angolare  $\Delta\vartheta$  in un periodo è un multiplo frazionario di  $2\pi$  ovvero se esistono  $p, q \in \mathbb{N}$  tali che

$$\Delta\vartheta = \int_0^{T_0} ds \frac{L^2}{mr^2(s)} = 2 \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{L^2}{mr^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{2p\pi}{q}.$$

2. Una giostra al luna-park ha un braccio di lunghezza  $L$ , che si muove di moto circolare uniforme con centro in  $O$  a frequenza angolare  $\omega_1$  su un piano verticale. Al braccio della giostra è incernierata una cabina cilindrica, con asse  $\hat{\eta}_3$  coincidente con l'asse del braccio stesso. La cabina, a sua volta, ruota attorno al suo asse di moto circolare uniforme a frequenza angolare  $\omega_2$ .

Si considerino due sistemi di riferimento: uno fisso  $\kappa = (O; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , con origine in  $O$ , asse  $\hat{e}_1$  ortogonale al piano di rotazione del braccio e asse  $\hat{e}_3$  verticale rivolto verso l'alto; uno mobile  $K = (O'; \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ , con origine  $O'$  scelta in un punto dell'asse comune del braccio e della cabina. All'istante  $t = 0$  il braccio della giostra è in posizione verticale verso l'alto e la terna  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$  coincide con  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ . Si calcolino:

- la legge di trasformazione delle coordinate da  $\kappa$  a  $K$ .
- la legge di trasformazione delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ .
- le equazioni di Newton, scritte per componenti nel sistema di riferimento  $K$ , per un punto materiale di massa  $m$  che si muove sotto l'effetto della forza di gravità e delle forze apparenti presenti nella cabina a causa del moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$ .

**Soluzione:** Siano:

- $\mathbf{r}(t)$  il vettore posizione di  $O'$  rispetto a  $O$  nella base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ;
- $B_t$  la matrice ortogonale di cambiamento di base da  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  a  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ ;
- $\theta, \varphi, \psi$  gli angoli di Eulero di nutazione, precessione, rotazione propria che descrivono la posizione di  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$  rispetto a  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ .

Per ipotesi,  $\theta = \theta(t) = \omega_1 t$ ,  $\varphi = \varphi(t) = 0$  e  $\psi = \psi(t) = \omega_2 t$ . In termini di questi angoli:

- il vettore che descrive la posizione dell'origine è:

$$\mathbf{r}(t) = L \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix};$$

- la matrice di rotazione è la composizione di una rotazione di un angolo  $\theta = \theta(t)$  attorno a  $\hat{e}_1$  e una rotazione di un angolo  $\psi = \psi(t)$  attorno a  $\hat{\eta}_3$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \\ &\equiv B_t^T \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi la legge di trasformazione delle coordinate da  $\kappa$  a  $K$  è

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\theta = \omega_1 t$  e  $\psi = \omega_2 t$ , il che risponde al punto (a).

Il vettore velocità angolare corrispondente alla rotazione attorno a  $\hat{e}_1$  a velocità angolare  $\dot{\theta} = \omega_1$  e alla rotazione attorno a  $\hat{\eta}_3$  a velocità angolare  $\dot{\psi} = \omega_2$  è  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\psi} \hat{\eta}_3$ . Dalla legge di cambiamento di base ricavata sopra troviamo che  $\hat{e}_1 = \cos \psi \hat{\eta}_1 - \sin \psi \hat{\eta}_2$ , cosicché il vettore velocità angolare nella base  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$  è:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

In termini di  $\boldsymbol{\Omega}$ , la legge di trasformazione delle velocità da  $\kappa$  a  $K$  è:

$$\dot{\mathbf{q}} = B_t [\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}] + \dot{\mathbf{r}},$$

dove

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \Omega_2 Q_3 - \Omega_3 Q_2 \\ \Omega_3 Q_1 - \Omega_1 Q_3 \\ \Omega_1 Q_2 - \Omega_2 Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} Q_3 \sin \psi - \dot{\psi} Q_2 \\ \dot{\psi} Q_1 - \dot{\theta} Q_3 \cos \psi \\ \dot{\theta} (Q_2 \cos \psi + Q_1 \sin \psi) \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{\mathbf{r}} = -L \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Quindi la legge di trasformazione delle velocità in componenti prende la forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} Q_3 \sin \psi - \dot{\psi} Q_2 \\ \dot{\psi} Q_1 - \dot{\theta} Q_3 \cos \psi \\ \dot{\theta} (Q_2 \cos \psi + Q_1 \sin \psi) \end{pmatrix} - L \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\psi} (Q_2 \cos \psi + Q_1 \sin \psi) \\ \dot{\theta} [(L - Q_3) \cos \theta - (Q_2 \cos \psi + Q_1 \sin \psi) \sin \theta] + \dot{\psi} \cos \theta (Q_1 \cos \psi - Q_2 \sin \psi) \\ \dot{\theta} [(L - Q_3) \sin \theta + (Q_2 \cos \psi + Q_1 \sin \psi) \cos \theta] + \dot{\psi} \sin \theta (Q_1 \cos \psi - Q_2 \sin \psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che risponde al punto (b).

Infine, le equazioni di Newton per un punto materiale di massa  $m$  che si muove sotto l'effetto della forza di gravità e delle forze apparenti presenti nella cabina a causa del moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$  hanno la forma:

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{G} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) - m\mathbf{A}, \quad (1)$$

dove  $\mathbf{G}$  è il vettore accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = -g\hat{e}_3$  scritto nella base  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ , ovvero, usando la formula di cambiamento di base dagli  $\hat{e}_i$  agli  $\hat{\eta}_i$ :

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Inoltre  $\mathbf{A} = B_t^T \ddot{\mathbf{r}}$  è l'accelerazione di  $O'$  rispetto a  $O$  scritto nella base  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} &= L\dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -L\dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che  $\ddot{\theta} = 0$ . Usando le espressioni esplicite di  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  e

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} = -\dot{\theta} \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

le equazioni di Newton Eq.(1) scritte per componenti prendono la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= -g \sin \psi \sin \theta + Q_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + 2\dot{Q}_3 \dot{\theta} \sin \psi + 2\dot{Q}_2 \dot{\psi} \\ &\quad + Q_1 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\psi}^2) + Q_2 \dot{\theta}^2 \sin \psi \cos \psi - Q_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi, \\ \ddot{Q}_2 &= -g \cos \psi \sin \theta - Q_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi - 2\dot{Q}_1 \dot{\psi} + 2\dot{Q}_3 \dot{\theta} \cos \psi \\ &\quad + Q_2 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2) + Q_1 \dot{\theta}^2 \sin \psi \cos \psi + Q_3 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi, \\ \ddot{Q}_3 &= -g \cos \theta - (Q_1 \cos \psi - Q_2 \sin \psi) \dot{\theta} \dot{\psi} - 2(\dot{Q}_2 \cos \psi + \dot{Q}_1 \sin \psi) \dot{\theta} \\ &\quad + Q_3 \dot{\theta}^2 - Q_1 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + Q_2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi, \end{aligned}$$

che risponde al punto (c).

3. Data una molecola rigida composta da 3 atomi di cui due ( $A$  e  $B$ ) di masse uguali  $m$  disposti agli estremi della base di un triangolo equilatero di base  $\ell$  e il terzo ( $C$ ) di massa  $2m$  nel restante vertice del triangolo,
- si trovi la posizione del centro di massa;
  - si trovino tre assi principali di inerzia rispetto al centro di massa e si calcolino i relativi momenti di inerzia.

Si supponga che la molecola si trovi all'istante  $t = 0$  nel piano  $xy$  di un sistema di riferimento fisso  $\kappa$ , con il centro di massa coincidente con l'origine di  $\kappa$ , il lato  $AB$  parallelo all'asse  $y$  e la massa  $C$  sull'asse  $x$  positivo. Si supponga inoltre che alle particelle  $A$ ,  $B$  e  $C$  siano assegnate all'istante iniziale delle velocità  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  compatibili con il vincolo di corpo rigido.

- Si discutano le condizioni che devono soddisfare le velocità iniziali  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  perché siano compatibili con il vincolo di corpo rigido.
- Si calcolino le componenti della velocità angolare e della velocità del centro di massa all'istante iniziale in termini delle componenti di  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$ .
- [Facoltativo]. Si scrivano le equazioni di Eulero per il vettore velocità angolare nel sistema di riferimento  $K$  solidale con il corpo e coincidente con  $\kappa$  a  $t = 0$ . Si determini la condizione che devono soddisfare  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  affinché la soluzione alle equazioni di Eulero sia aperiodica.

**Soluzione:** L'asse del triangolo passante per  $C$  e per il punto medio tra  $A$  e  $B$  è un asse di simmetria del corpo di ordine  $n = 2$ , quindi il centro di massa si trova su tale asse, a distanza  $d_1$  da  $C$  e a distanza  $d_2$  dal lato  $A - B$ , con  $d_1(2m) = d_2(m + m) \Rightarrow d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell$ . Questo risponde al punto (a).

Le posizioni delle tre particelle all'istante iniziale nel riferimento  $\kappa$  sono:

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \ell, \quad \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \ell, \quad \mathbf{r}_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ell.$$

Se indichiamo con  $r_{a,i}$  la componente  $i$ -esima del vettore  $\mathbf{r}_a$ , con  $a \in \{A, B, C\}$ , la matrice d'inerzia rispetto al centro di massa nella base di  $\kappa$  ha la forma:

$$I = \sum_{a=A,B,C} \begin{pmatrix} m_a(r_{a,2}^2 + r_{a,3}^2) & -m_a r_{a,1} r_{a,2} & -m_a r_{a,1} r_{a,3} \\ -m_a r_{a,2} r_{a,1} & m_a(r_{a,1}^2 + r_{a,3}^2) & -m_a r_{a,2} r_{a,3} \\ -m_a r_{a,3} r_{a,1} & -m_a r_{a,3} r_{a,2} & m_a(r_{a,1}^2 + r_{a,2}^2) \end{pmatrix} = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

che dimostra che gli assi principali di inerzia coincidono con gli assi coordinati  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  di  $\kappa$  e che i corrispondenti momenti principali di inerzia sono  $I_1 = \frac{1}{2} < I_2 = \frac{3}{4} < I_3 = \frac{5}{4}$ . Questo risponde al punto (b).

Le velocità iniziali sono compatibili con il vincolo di corpo rigido se e solo se esistono due vettori  $\boldsymbol{\omega}$  (che corrisponde alla velocità angolare del sistema attorno al centro di massa all'istante iniziale) e  $\mathbf{v}_G$  (che corrisponde alla velocità del centro di massa all'istante iniziale) tali che

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_A + \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_B + \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_C + \mathbf{v}_G,$$

che in componenti prendono la forma:

$$\begin{cases} v_{A,1} = -\frac{1}{2}\omega_3 + v_{G,1} \\ v_{A,2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_3 + v_{G,2} \\ v_{A,3} = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_2 + v_{G,3} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{B,1} = \frac{1}{2}\omega_3 + v_{G,1} \\ v_{B,2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_3 + v_{G,2} \\ v_{B,3} = -\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_2 + v_{G,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{C,1} = v_{G,1} \\ v_{C,2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_3 + v_{G,2} \\ v_{C,3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_2 + v_{G,3} \end{cases} \quad (2)$$

che sono 9 relazioni lineari in 6 incognite (le tre componenti di  $\boldsymbol{\omega}$  e le tre componenti di  $\mathbf{v}_G$ ) che ci permettono di ricavare:

$$\begin{cases} v_{G,1} = v_{C,1} \\ v_{G,2} = \frac{v_{B,2} + v_{C,2}}{2} \\ v_{G,3} = \frac{v_{A,3} + v_{B,3} + 2v_{C,3}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 = v_{A,3} - v_{B,3} \\ \omega_2 = \frac{v_{A,3} + v_{B,3} - 2v_{C,3}}{\sqrt{3}} \\ \omega_3 = 2(v_{B,1} - v_{C,1}) \end{cases} \quad (3)$$

Le 9 relazioni Eq.(2) sono piú delle incognite, quindi non possono essere tutte linearmente indipendenti tra loro: perché il sistema sia risolubile devono valere 3 condizioni di compatibilità, e piú precisamente:

$$2v_{C,1} = v_{A,1} + v_{B,1}, \quad v_{A,2} = v_{B,2}, \quad v_{C,2} - v_{B,2} = \sqrt{3}[v_{B,1} - v_{C,1}], \quad (4)$$

come si verifica facilmente dalle Eq.(2). L' Eq.(4) risponde al punto (d), mentre l'Eq.(3) risponde al punto (e).

Infine, usando le espressioni esplicite di  $I_1, I_2, I_3$ , si vede che le equazioni di Eulero per il sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1(t) = -\Omega_2(t)\Omega_3(t) \\ \dot{\Omega}_2(t) = \Omega_1(t)\Omega_3(t) \\ \dot{\Omega}_3(t) = -\frac{1}{5}\Omega_1(t)\Omega_2(t) \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \Omega_1(0) \\ \Omega_2(0) \\ \Omega_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{A,3} - v_{B,3} \\ \frac{v_{A,3} + v_{B,3} - 2v_{C,3}}{\sqrt{3}} \\ 2(v_{B,1} - v_{C,1}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

dove il dato iniziale è lo stesso ricavato nella Eq.(3), poiché all'istante iniziale i sistemi di riferimento mobile e fisso coincidono. La soluzione alle equazioni di Eulero è aperiodica se e solo se  $L^2 = 2EI_2$  (dove  $L^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2$  e  $2EI_2 = I_1I_22\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3I_2\Omega_3^2$ ) e, allo stesso tempo,  $\boldsymbol{\Omega}(0)$  non è orientato lungo il secondo asse principale di inerzia. Combinando queste due condizioni, troviamo che la soluzione alle equazioni di Eulero è aperiodica se e solo se  $I_1(I_2 - I_1)\Omega_1^2(0) = I_3(I_3 - I_2)\Omega_3^2(0) \neq 0$ , ovvero  $\Omega_1^2(0) = 5\Omega_3^2(0)$  che, in termini delle componenti delle velocità iniziali, diventa:

$$(v_{A,3} - v_{B,3})^2 = 20(v_{B,1} - v_{C,1})^2 \neq 0 \quad (6)$$

il che risponde al punto (f).