

## FM210 - FISICA MATEMATICA I

SECONDA PROVA PRE-ESONERO [19-12-2011]

1. Un corpo di massa  $m$  si muove in  $\mathbb{R}^2$  sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale  $V(|\mathbf{x}|)$ :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -V'(|\mathbf{x}|)$$

con

$$V(r) = -V_0 \frac{R^2}{r^2 + R^2}$$

e  $V_0 > 0$ .

- Si trovino due integrali primi del moto;
  - Si analizzi qualitativamente il moto radiale, ovvero si trovino i punti di equilibrio, si disegnino le curve di livello e le orbite nel piano  $(r, \dot{r})$ ;
  - Si dica se ed eventualmente per quali valori delle grandezze conservate e dei parametri del sistema il moto è aperto e in tal caso si calcoli la distanza di massimo avvicinamento al centro;
  - Si dica se ed eventualmente per quali valori delle grandezze conservate e dei parametri del sistema il moto radiale è periodico e se ne calcolino i punti di inversione e il periodo;
  - Si trovino le condizioni sulle grandezze conservate e i parametri del sistema tali che il moto complessivo del corpo sia periodico.
2. Una giostra al luna-park ha un braccio di lunghezza  $L$ , che si muove di moto circolare uniforme con centro in  $O$  a frequenza angolare  $\omega_1$  su un piano verticale. Al braccio della giostra è incernierata una cabina cilindrica, con asse  $\hat{\eta}_3$  coincidente con l'asse del braccio stesso. La cabina, a sua volta, ruota attorno al suo asse di moto circolare uniforme a frequenza angolare  $\omega_2$ .

Si considerino due sistemi di riferimento: uno fisso  $\kappa = (O; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , con origine in  $O$ , asse  $\hat{e}_1$  ortogonale al piano di rotazione del braccio e asse  $\hat{e}_3$  verticale rivolto verso l'alto; uno mobile  $K = (O'; \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ , con origine  $O'$  scelta in un punto dell'asse comune del braccio e della cabina. All'istante  $t = 0$  il braccio della giostra è in posizione verticale verso l'alto e la terna  $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$  coincide con  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ . Si calcolino:

- la legge di trasformazione delle coordinate da  $\kappa$  a  $K$ .
- la legge di trasformazione delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ .
- le equazioni di Newton, scritte per componenti nel sistema di riferimento  $K$ , per un punto materiale di massa  $m$  che si muove sotto l'effetto della forza di gravità e delle forze apparenti presenti nella cabina a causa del moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$ .

3. Data una molecola rigida composta da 3 atomi di cui due ( $A$  e  $B$ ) di masse uguali  $m$  disposti agli estremi della base di un triangolo equilatero di base  $\ell$  e il terzo ( $C$ ) di massa  $2m$  nel restante vertice del triangolo,
- (a) si trovi la posizione del centro di massa;
  - (b) si trovino tre assi principali di inerzia rispetto al centro di massa e si calcolino i relativi momenti di inerzia.

Si supponga che la molecola si trovi all'istante  $t = 0$  nel piano  $xy$  di un sistema di riferimento fisso  $\kappa$ , con il centro di massa coincidente con l'origine di  $\kappa$ , il lato  $AB$  parallelo all'asse  $y$  e la massa  $C$  sull'asse  $x$  positivo. Si supponga inoltre che alle particelle  $A$ ,  $B$  e  $C$  siano assegnate all'istante iniziale delle velocità  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  compatibili con il vincolo di corpo rigido.

- (d) Si discutano le condizioni che devono soddisfare le velocità iniziali  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  perché siano compatibili con il vincolo di corpo rigido.
- (e) Si calcolino le componenti della velocità angolare e della velocità del centro di massa all'istante iniziale in termini delle componenti di  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$ .
- (f) **[Facoltativo]**. Si scrivano le equazioni di Eulero per il vettore velocità angolare nel sistema di riferimento  $K$  solidale con il corpo e coincidente con  $\kappa$  a  $t = 0$ . Si determini la condizione che devono soddisfare  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_C$  affinché la soluzione alle equazioni di Eulero sia aperiodica.