Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato I - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Per prima cosa calcoliamo lo spettro di A il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 6),$$

e dunque abbiamo $\Sigma(A) = \{0, -2, 3\}$. Calcoliamo gli autospazi.
$E(0) = Ker(A)$ è dato da

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

e quindi $E(0) = \big\{t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$.
$E(-2) = Ker(A + 2\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y + 8z = 0 \end{cases}$$

dunque $E(-2) = \big\{(t, t/2, 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$. Analogamente otteniamo
$E(3) = \big\{(0, -t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$. Pertanto una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (1, 0, 1)$$
$$v_2 = (1, 2, 0)$$
$$v_3 = (0, -1, 1)$$

Abbiamo perciò

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 \\ \dot{y}_3 = 3y_3 \end{cases}, \qquad y(0) = Qx(0) = (1, 1, 1)$$

la cui soluzione è $(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = (1, e^{-2t}, e^{3t})$. La soluzione del sistema iniziale sarà quindi data da

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - e^{3t} \\ 1 + e^{3t} \end{pmatrix}$$

Osservando il sistema nelle nuove coordinate, notiamo che il moto si svolge nel piano $y_1 = 1$, il piano affine parallelo al piano vettoriale $\{y_1 = 0\}$, che nelle coordinate di partenza è $\{2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Il piano affine corrispondente dipende dal dato iniziale $x(0) = (2, 1, 2)$, dunque avremo $\{2x_1 - x_2 - x_3 = 1\}$.

<u>Esercizio 2.</u> Notiamo che il sistema è già in forma triangolare, dunque possiamo risolverlo partendo dall'ultima equazione. Abbiamo

$$\dot{x}_3 = x_3, \qquad \Rightarrow, x_3(t) = e^t x_3(0) = e^t$$

Quindi la seconda equazione diventa $\dot{x}_2 = x_2 + e^t$ la cui soluzione è data da

$$x_2(t) = e^t \left(x_2(0) + \int_0^t e^{-s} e^s \mathrm{d}s \right) = e^t(1+t)$$

Sostituendo ancora nella prima troviamo $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_3$ e quindi

$$x_1(t) = e^{2t} \left(x_1(0) + \int_0^t e^{-2s} e^s \mathrm{d}s \right) = e^{2t}(2 - e^{-t})$$

Dunque $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (2e^{2t} - e^t, e^t(1+t), e^t)$.

<u>Esercizio 3.</u> Cominciamo immediatamente col distinguere il caso $\alpha = 0$ dal caso $\alpha \neq 0$. Infatti se $\alpha = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Risolvendo la prima troviamo $x_1(t) = e^t x_{01}$. Allora avremo

$$x_2(t) = e^t \left(x_{02} + \int_0^t e^{-s} e^s x_{01} \mathrm{d}s \right) = e^t(x_{02} + x_{01}t)$$

La soluzione generale è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t x_{01} \\ e^t(x_{02} + x_{01}t) \end{pmatrix}$$

Se invece $\alpha \neq 0$ allora il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 - \alpha$$

e quindi lo spettro dell'operatore è dato da $\Sigma(A) = \{1 + \sqrt{\alpha}, 1 - \sqrt{\alpha}\}$. Consideriamo quindi il caso $\alpha > 0$, poniamo $\omega = \sqrt{a}$ e calcoliamo gli autospazi; $E^*(1+\omega)$ è dato da

$$\begin{cases} -\omega x_1 + \omega^2 x_2 = 0 \\ x_1 - \omega x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(1+\omega) = \{(\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Analogamente si verifica che

$$E^*(1-\omega) = \{(-\omega t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

pericò troviamo una base di autovettori è data da

$$u = (\omega, 1) \qquad v = (-\omega, 1)$$

Abbiamo dunque

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}$$

Il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (1+\omega)y_1 \\ \dot{y}_2 = (1-\omega)y_2 \end{cases}, \qquad y(0) = Qx(0) = \begin{pmatrix} \frac{x_{01}}{2\omega} + \frac{x_{02}}{2} \\ -\frac{x_{01}}{2\omega} + \frac{x_{02}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

e perciò

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t} y_{01} \\ e^{(1-\omega)t} y_{02} \end{pmatrix}$$

Allora avremo che la soluzione nelle coordinate di partenza sarà

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} e^{(1+\omega)t}y_{01}\omega - e^{(1-\omega)t}y_{02}\omega \\ e^{(1+\omega)t}y_{01} + e^{(1-\omega)t}y_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{01}}{2}e^t\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) + \frac{\omega x_{02}}{2}e^t\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \\ \frac{x_{01}}{2\omega}e^t\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) + \frac{x_{02}}{2}e^t\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \end{pmatrix}$$

Infine nel caso $\alpha < 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{|\alpha|}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha > 0$; la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte notiamo che

$$\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \cos\sqrt{|\alpha|}t \qquad \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i} = \sin\sqrt{|\alpha|}t$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{|\alpha|}t x_{01} - \sqrt{|\alpha|}e^t\sin\sqrt{|\alpha|}t x_{02} \\ \\ \frac{e^t}{\sqrt{|\alpha|}}\sin\sqrt{|\alpha|}t x_{01} + e^t\cos\sqrt{|\alpha|}t x_{02} \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 4.</u> L'equazione può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine ponendo $y = \dot{x}$. Troviamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x + y + \sin t \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b(t)$$

dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$.
Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

e quindi abbiamo due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Calcoliamo gli autospazi. $E(-1) = \ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$x + y = 0, \qquad x = -y$$

quindi $E(-1) = \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.
$E(2) = \ker(A - 2\mathbb{1})$ è dato da

$$-2x + y = 0, \qquad y = 2x$$

cioè $E(2) = \{(t, 2t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$. Una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (1, -1)$$
$$v_2 = (1, 2)$$

Poniamo

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e quindi $D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sia inoltre $B(t) = Qb(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sin t \\ \frac{1}{3}\sin t \end{pmatrix}$, allora il sistema nelle nuove coordinate (z, w) diventa

$$\begin{cases} \dot{z} = -z - \dfrac{2}{3}\sin t \\ \dot{w} = 2w + \dfrac{1}{3}\sin t \end{cases} \qquad (z(0), w(0)) = (0, 1)$$

la cui soluzione è data da

$$z(t) = e^{-t}\left(0 - \frac{1}{3}\int_0^t e^s \sin s ds\right) = -\frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{6}\cos t - \frac{1}{6}e^{-t}$$
$$w(t) = e^{2t}\left(1 + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-2s} \sin s ds\right) = \frac{16}{15}e^{2t} - \frac{2}{15}\sin t - \frac{1}{15}\cos t$$

Allora la soluzione nelle coordinate di partenza è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

e la soluzione dell'equazione è data dalla prima componente, cioè

$$x(t) = z + w = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{16}{15}e^{2t} - \frac{3}{10}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$$

<u>Esercizio 5.</u> Il polinomio caratteristico dell'operatore A è

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

e quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1 + i \qquad \lambda_3 = -1 - i$$

uno reale, e due complessi coniugati.
Cerchiamo una base di autovettori. L'autospazio relativo a λ_1 è dato da

$$\begin{cases} -y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

e quindi abbiamo una soluzione $v_1 = (1, 0, 2)$. $E(-1+i) = \ker(A - \lambda_2 \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} (1-i)x - y = 0 \\ -y - (1-i)z = 0 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $v_2 = (1, 1+i, 1)$. Analogamente otteniamo che un autovettore relativo a $\lambda_3 = -1 - i$ è $v_3 = (1, 1-i, 1)$. Siano w le coordinate nella base degli autovettori, si ha

$$w = Q^{-1}x, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -2i & 0 & 2i \\ 2+2i & -1 & -1-i \\ -2+2i & 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

Si verifica che

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema nelle nuove coordinate w diventa

$$\dot{w} = Bw, \qquad w_0 = Qx(0) = \begin{pmatrix} x_0 - z_0 \\ (x_0 - \frac{1}{2}z_0) + i(-x_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}z_0) \\ \frac{(-\frac{1}{2}y_0 - 1}{2z_0) + i(x_0 - \frac{1}{2}z_0)} \end{pmatrix}$$

che ha soluzione

$$w_1(t) = w_{01}$$
$$w_2(t) = e^{(-1+i)t}w_{02}$$
$$w_3(t) = e^{(-1-i)t}w_{03}$$

Nelle coordinate di partenza abbiamo $x(t) = Q^{-1}w(t)$, cioè

$$
\begin{aligned}
x(t) &= w_1 + w_2 + w_3 = -x_0 + x_0(2e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t) - y_0 e^{-t}\sin t + z_0 + z_0(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t) \\
y(t) &= (1-i)w_2 + (1+i)w_3 = 4x_0 e^{-t}\sin t + y_0(e^{-t}\cos t - e^{t}\sin t) - 2z_0 e^{-t}\sin t \\
z(t) &= 2w_1 + w_2 + w_3 = -2x_0 + x_0(2e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t) - y_0 e^{-t}\sin t + 2z_0 + z_0(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)
\end{aligned}
$$