Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato X - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Parametrizziamo il solido con le coordinate $(r'\cos\theta, r'\sin\theta, z)$ con $z \in [0,h]$, $\theta \in [0,2\pi]$ e $r' \in [0, f(z)]$, dove $f(z) = \frac{-r}{h}z + r = \frac{r}{h}(h-z)$. Abbiamo quindi che la massa del cono è data da

$$\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{f(z)} r'\rho(z)\mathrm{d}r' = \pi \int_0^h \mathrm{d}z f^2(z)\rho(z) =$$
$$\frac{4m}{r^2h^2}\int_0^h \frac{r^2}{h^2}(h-z)^3 = \frac{4m}{h^4}\frac{h^4}{4} = m$$

Notiamo inoltre che il sistema è invariante per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e_3}$ (passante per il vertice del cono e ortogonale alla base); la densità di massa dipende solo dall'altezza del punto dalla base dunque il centro di massa si troverà lungo l'asse $\mathbf{e_3}$. Anche con un calcolo esplicito si mostra che $x_{cm} = y_{cm} = 0$. Ad esempio

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{f(z)} r'\rho(z) r'\cos\theta \mathrm{d}r' = 0$$

Abbiamo invece che

$$z_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{f(z)} r'\rho(z) z \mathrm{d}r' = \frac{\pi}{m}\int_0^h f^2(z) z\rho(z)\mathrm{d}z = \frac{4}{h^4}\int_0^h z(h-z)^3\mathrm{d}z =$$
$$\frac{4}{h^4}\int_0^h \frac{(h-z)^4}{4}\mathrm{d}z = \frac{h}{5}$$

L'asse $\mathbf{e_3}$ è un asse di inerzia; basta scegliere gli assi $\mathbf{e_1}$ ed $\mathbf{e_2}$ ortogonali ad $\mathbf{e_3}$. Dunque i momenti di inerzia sono

$$I_3 = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} \mathrm{d}r' r'(r')^2\rho(z) = \frac{\pi}{2}\int_0^h \frac{r^2}{h^2}(h-z)^5 \frac{4m}{\pi r^2 h^2}\mathrm{d}z = \frac{mh^2}{3}$$
$$I_1 = I_2 = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{f(z)} \mathrm{d}r' r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left((z-z_{cm})^2 + (r')^2\sin^2\theta\right)\rho(z)$$
$$= \int_0^h \mathrm{d}z\rho(z)\left[\frac{r^2}{h^2}(h-z)^2(z-z_{cm})^2\pi + \frac{r^4}{h^4}(h-z)^4\pi\right] =$$
$$= m\int_0^h \mathrm{d}z\left[\frac{4}{h^4}(h-z)^3(z-z_{cm})^2 + \frac{r^2}{h^6}(h-z)^5\right] = \frac{14}{75}mh^2 + m\frac{r^2}{6}$$

Esercizio 2. Scegliamo un sistema di coordinate in cui l'origine coincida con l'atomo 2 l'asse x passante per la massa 3 e l'asse y passante per la massa 1. Abbiamo perciò $P_1 = (\frac{l}{2}\ell, \frac{\sqrt{3}\ell}{2}, 0)$, $P_2 = (0,0,0)$ e $P_3 = (\ell, 0, 0)$. Dunque la posizione del centro di massa è

$$x_{cm} = \frac{\ell m + \frac{\ell}{2}m}{3m} = \frac{\ell}{2}, \qquad y_{cm} = \frac{m\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{3m} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell, \qquad z_{cm} = 0$$

cioè a distanza $h/3$ dalla base dove $h = \frac{\sqrt{4}}{2}\ell$ è l'altezza del triangolo.

Un asse d'inerzia $\mathbf{e_3}$ è l'asse passante per il centro di massa e ortogonale al piano della molecola. Tale asse è un asse di simmetria di ordine $n > 2$ (n=3), dunque l'ellissoide di inerzia è un ellissoide di rotazione. Possiamo scegliere gli assi $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ conteuti nel piano della molecola con $\mathbf{e_2}$ passante per l'atomo 1 ed $\mathbf{e_1}$ ortogonale ad esso.
I momenti principali d'inerzia sono

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{3}{36}m\ell^2 + \frac{3}{9}m\ell^2 + \frac{3}{36}m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 \\
I_2 &= \frac{1}{4}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 \\
I_3 &= \frac{1}{3}m\ell^2 + (\frac{1}{4} + \frac{3}{36})m\ell^2 + (\frac{1}{4} + \frac{3}{36})m\ell^2 = m\ell^2
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora il sistema di coordinate centrato nel baricentro con l'asse y passante per l'atomo 1. Abbiamo

$$P_1 = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, 0), \qquad P_2 = (-\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, 0), \qquad P_3 = (\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, 0)$$

Verifichiamo esplicitamente che il momento d'inerzia rispetto a un qualunque asse contenuto nel piano xy è lo stesso (cioè $m\frac{\ell^2}{2}$). L'equazione cartesiana di una retta r su quel piano con una direzione qualsiasi è $y\cos\theta - x\sin\theta = 0$ con θ l'angolo tra tale retta e l'asse x. Troviamo perciò

$$d(P_1, r) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell\cos\theta, \qquad d(P_2, r) = |\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}\ell\cos\theta|, \qquad d(P_3, r) = |-\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}\ell\cos\theta|$$

quindi

$$I_r = m\ell^2\left[\frac{1}{3}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\cos^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{12}\cos^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin\theta\cos\theta\right] = \frac{1}{2}m\ell^2$$

Pensiamo al sistema del centro di massa al tempo $t = 0$ come il sistema fisso e lo stesso sistema come sistema mobile K per $t > 0$. I due sistemi coincidono per $t = 0$. Il sistema K ruota intorno all'asse z con velocità angolare costante, dunque con $\omega = (0, 0, c)$. Si deve avere che

$$\mathbf{v}_1 = v_{cm} + \omega \wedge (0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, 0)$$

dove il vettore $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, 0)$ individua la posizione del punto 1. Da questa relazione ricaviamo che si deve avere $\mathbf{v}_{cm} = (u_1, u_2, 0)$ e $c = \omega$ dunque la velocità angolare deve essere $\omega = (0, 0, \omega)$. Il moto nel sistema del centro di massa sarà dunque una rotazione con velocità angolare costante ω intorno all'origine. In presenza della forza di gravità non cambia la situazione. In seguito all'azione della gravità avremo che il centro di massa (l'origine di K) si muoverà verso il basso con un moto uniformemente accelerato, ma questo non incide sulla discussione del moto nel sistema di riferimento K. In k invece si avrà un moto che è la composizione di una rotazione intorno al centro di massa più una trazlazione del centro di massa che è un moto rettilineo uniforme con velocità iniziale $\mathbf{v}_{cm} = (u_1, u_2, 0)$. In presenza della forza di gravità abbiamo che lungo la terza componente il centro di massa ha un moto uniformemente accelerato verso il basso ($z_{cm} = -g\frac{t^2}{2}$). Dunque il moto totale sarà una rotazione intorno al centro più un moto parabolico del centro di massa verso il basso $\mathbf{q}(t)_{cm} = (u_1 t, u_2 t, -g\frac{t^2}{2})$.
Dalle equazioni di Eulero

$$
\begin{cases}
I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\
I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 \\
I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2
\end{cases}
$$

e ricordando che $I_1 = I_2$, notiamo che effettivamente alle velocità iniziali $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v_2}$ corrisponde una velocità angolare $(0, 0, \omega)$ che è un punto di equilibrio del sistema (dunque abbiamo una rotazione costante). Per trovare le altre velocità iniziali che danno luogo a rotazioni costanti, basta notare che velocità angolari della forma $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, 0)$ sono punti di equilibrio. Queste velocità angolari corrispondono a una rotazione intorno ad un asse contenuto nel piano xy, quello in cui giace la molecola.

Dunque cerchiamo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v_2}$ tali che la velocità angolare abbia quella forma. Da

$$\mathbf{v}_1 = v_{cm} + (\Omega_1, \Omega_2, 0) \wedge (0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, 0)$$

troviamo che $\mathbf{v}_1$ deve essere $\mathbf{v}_1 = (u_1, u_2, u_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ell\Omega_1)$, mentre da

$$\mathbf{v}_2 = v_{cm} + (\Omega_1, \Omega_2, 0) \wedge (-\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, 0)$$

troviamo che $\mathbf{v}_2$ deve essere $\mathbf{v}_2 = (u_1, u_2, u_3 + \frac{\ell}{2}\Omega_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\ell\Omega_1)$. In questo caso la velocità iniziale del centro di massa sarà data da $\mathbf{v}_{cm} = (u_1, u_2, u_3)$.