Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato II - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Risolviamo l'equazione per saparazione di variabili. Troviamo

$$\int_e^{x(t)} \frac{ds}{s\log s} = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{\sin s} ds$$

Nel primo integrale poniamo $r = \log s$ e troviamo:

$$\int_e^{x(t)} \frac{ds}{s\log s} = \int_1^{\log x(t)} \frac{dr}{r} = \log\log x(t) - \log 1$$

Nel secondo ponendo $r = \tan\frac{s}{2}$ si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{\sin s} ds = \int_1^{\tan\frac{t}{2}} \frac{1+r^2}{2r}\frac{2}{1+r^2} dr = \log\tan(\frac{t}{2}) - \log 1$$

e quindi

$$\log\log x(t) = \log\tan\frac{t}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^{\tan\frac{t}{2}}$$

Esercizio 2. Posto $x = \frac{y}{t}$ abbiamo che $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{t} - \frac{y}{t}$ e perciò

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{3+2e^t}{ye^t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

che possiamo risolvere per separazione di variabili. Abbiamo

$$\int_1^{y(t)} s ds = \frac{y(t)}{2} - \frac{1}{2} = \int_1^t (3e^{-s}+2) ds = -3e^{-t} + 2t + 3e^{-1} - 2$$

$$y^2(t) = -6e^{-t} + 4t + 6e^{-1} - 3 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \sqrt{-6e^{-t} + 4t + 6e^{-1} - 3}$$

e dunque la soluzione del problema iniziale è:

$$x(t) = \frac{1}{t}\sqrt{-6e^{-t} + 4t + 6e^{-1} - 3}, \qquad t \in (0, +\infty)$$

Esercizio 3. Poniamo $y = 2t - x$, abbiamo che $\dot{x} = 2 - \dot{y}$, e quindi troviamo

$$\begin{cases} \dot{y} = ty^2 \\ y(0) = -\alpha \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ troviamo che la soluzione è $y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e quindi la soluzione del problema iniziale sarà $x(t) = 2t$ che è definita per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha \neq 0$ risolvendo per separazione di variabili si trova

$$\int_{-\alpha}^{y(t)} \frac{ds}{s^2} = \int_0^t s ds$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(t)}-\frac{1}{\alpha}=\frac{t^2}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad y(t)=\frac{-2\alpha}{\alpha t^2+2}$$

Dunque se $\alpha<0$ abbiamo che la soluzione è definita per $t\in\left(-\sqrt{\frac{-2}{\alpha}},\sqrt{\frac{-2}{\alpha}}\right)$, se invece $\alpha>0$ la soluzione è definita per ogni tempo $t\in\mathbb{R}$.

<u>Esercizio 4.</u>Notiamo che l'equazione è del tipo

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)$$

con $a(t)=-(1/t)$ e $b(t)=e^{-t}$.Poniamo

$$A(t)=\int_1^t a(s)\mathrm{d}s=-\int_1^t\frac{1}{s}\mathrm{d}s=-\log t$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$x(t)=e^{A(t)}c(t)$$

e quindi dobbiamo avere che

$$\dot{c}(t)=b(t)e^{-A(s)} \qquad \Rightarrow c(t)=x_0+\int_1^t b(s)e^{-A(s)}\mathrm{d}s$$

Troviamo

$$\int_1^t e^{-s}s\mathrm{d}s=2e^{-1}-e^{-t}(t+1)$$

e quindi

$$x(t)=\frac{1}{t}\left(x_0+2e^{-1}-e^{-t}(t+1)\right):=\varphi(t,x_0)$$

È facile notare che per ogni dato iniziale $\bar{x}$ in un intorno di 0 abbiamo che

$$\lim_{t\to\infty}|\varphi(t,\bar{x})|=0$$

cioè 0 è attrattivo. Mostriamo ora che la soluzione non è prolungabile.
La soluzione trovata è definita per $t\in(0,+\infty)$. Cerchiamo un prolungamento cioè una funzione u tale che

$$u:I\to\mathbb{R}, \qquad I\supset(0,\infty) \qquad u(t)=x(t) \qquad \forall t\in(0,\infty)$$

e che risolve il problema. Supponiamo per assurdo di trovare una funzione u con quelle proprietà. Il suo intervallo di definizione deve essere del tipo (α,∞) con $\alpha<0$, ma dato che su $(0,\infty)$ questa funzione coincide con $x(t)$, abbiamo che u ha un asintoto in 0 e quindi non sarebbe continua, che è un assurdo dato che una soluzione del problema di Cauchy è di classe C^1.

<u>Esercizio 5.</u> Risolviamo l'equazione per separazione di variabili:

$$x(t)\dot{x}(t)=\frac{t}{-t^4+2\sqrt{3}t^2-4}=\frac{-t}{(\sqrt{3}-t^2)^2+1}$$

e quindi

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{x(t)} s\mathrm{d}s=\int_0^t\frac{-s}{(\sqrt{3}-s^2)^2+1}\mathrm{d}s \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt{3}-t^2)-\frac{\pi}{6}$$

Allora

$$x(t) = \sqrt{\arctan(\sqrt{3} - t^2)}$$

che è definita per $t \in \left[-3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right]$; nonostante questo la funzione non è derivabile in $t = \pm 3^{\frac{1}{4}}$, infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\arctan(\sqrt{3} - t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(\sqrt{3} - t^2)}} \frac{-2t}{(1 + (\sqrt{3} - t^2)^2)} \to \mp\infty \qquad t \to \pm 3^{\frac{1}{4}}$$

e perciò l'intervallo massimale in cui la soluzione è derivabile è $\left(-3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)$.