Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato III - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

<u>Esercizio 1.</u> (1.1) Risulta $\dot{x} = H_y$. Quindi

$$\dot{H} = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = H_y(H_x + \dot{y}) = H_y(H_x + f)$$

e quindi $\dot{H} = 0$ se $f = -H_x$, che dà

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -y[(x^2+y^2-1)(y+1-x-y-1-x) + 2x((y+1)^2 - x^2)] \\ &= -2xy(-x^2-y^2+1+y^2+2y+1-x^2) \\ &= -4xy(y+1-x^2) \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2+y^2-1)(y+1) + ((y+1)^2-x^2)(x^2+3y^2-1) \\ \dot{y} = -4xy(y+1-x^2) \end{cases}$$

(1.2) Si ha $\dot{y} = 0$ se $f(x,y) = 0$, e quindi se $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $y = x^2 - 1$.
Se $x = 0$ si ha $\dot{x} = 0$se

$$\begin{aligned} 0 &= 2y(y^2-1)(y+1) + (y+1)^2(3y^2-1) \\ &= (y+1)^2(5y^2-2y-1) \end{aligned}$$

che ammette come zeri $y = -1$ e $y = (1 \pm \sqrt{6})/5$. Quindi tre punti di equilibrio sono

$$P_1 = (0,-1), \qquad P_2 = \left(0, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right), \qquad P_3 = \left(0, \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)$$

Se $y = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ se

$$0 = (x^2-1)(1-x^2)$$

che dà $x = \pm 1$. Quindi altri due punti di equilibrio sono

$$P_4 = (1,0), \qquad P_5 = (-1,0)$$

Se $y = x^2 - 1$ si ha $\dot{x} = 0$ se

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2(x^2-1)(x^4-x^2) + (x^4-x^2)(3x^4-5x^2+2) \\ &= x^2(x^2-1)(5x^4-7x^2+2) \end{aligned}$$

che ammette zeri per $x = 0$, $x = \pm 1$ e x tale che $x^2 = (7 \pm 3)/10$, quindi $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{2/5}$. Poichè $y = x^2 - 1$ si ha $y = -1$ se $x = 0$ e $y = 0$ se $x = \pm 1$:quindi tali punti d'equilibrio coincidono con i punti P_1, P_4 e P_5 già trovati. I avlori $x = \pm\sqrt{2/5}$ dànno invece due nuovi punti d'equilibrio

$$P_6 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{3}{5}\right), \qquad P_7 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{3}{5}\right).$$

(1.3) Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di equilibrio. La matrice del sistema linearizzato è data da

$$
\begin{aligned}
A(P_0) &= \begin{pmatrix} H_{xy}(P_0) & H_{yy}(P_0) \\ -H_{xx}(P_0) & -H_{xy}(P_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4x_0(1 + 2y_0^2 - x_0^2) & g(x_0, y_0) \\ -4y_0(1 + y_0 - 3x_0^2) & -4x_0(1 + 2y_0 - x_0^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dove

$$
g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)[2(y + 1) + 2y] + (y + 1)[(2y)^2 + 2(x^2 + 3y^2 - 1)] + 6y[(y + 1)^2 - x^2]
$$

Si vede allora che

$$
A(P_1) = A(P_4) = A(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

quindi nessuna informazione sulla stabilità di tali punti può essere ricavata dallo studio del sistema linearizzato. D'altra parte anche il calcolo per gli altri punti risulta inutilmente laborioso. In ogni caso si trova che gli autovalori della matrice linearizzata hanno parte reale nulla, quindi anche in questo caso non si ottiene alcuna informazione.

<u>Esercizio 2.</u> (2.1) Si cerca una funzione $H(x, y)$ tale che

$$
\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = x(1 + \alpha x^2), \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y(1 + 3\alpha x^2).
$$

Integrando la prima equazione rispetto y otteniamo

$$
H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2) + c_1(x)
$$

dove $c_1(x)$ è una funzione arbitraria di x, mentre integrando la seconda rispetto a x otteniamo

$$
H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2) + c_2(y)
$$

dove $c_2(y)$ è una funzione arbitraria di y. Possiamo allora uguagliare le due espressioni ponendo $c_1(x) = c_2(y) = cost. = 0$, e ottenere

$$
H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2).
$$

(2.2) Si ha $\dot{x} = 0$ per $x = 0$ oppure, se $\alpha < 0$, per $x = \pm x_0$, con $x_0 = \sqrt{-1/\alpha}$. Sostituendo nella seconda e imponendo $\dot{y} = 0$ otteniamo

$$
\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \qquad y = 0, \\ x = \pm x_0 & \Rightarrow \qquad y = 0, \end{cases}
$$

Quindi se $\alpha \geq 0$ abbiamo un solo punto di equilibrio $P_0 = (0, 0)$, mentre se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti d'equilibrio: $P_0, P_1 = (x_0, 0)$ e $P_2 = (-x_0, 0)$.
(2.3) Sia $A(x, y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio (x, y). Si ha allora

$$
A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 3\alpha x^2 & 0 \\ -6\alpha xy & -1 - 3\alpha x^2 \end{pmatrix}
$$

Per $(x, y) = (0, 0)$ si ottiene

$$
A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 1$: quindi P_0 è un punto di sella, dunque instabile.
Se $\alpha < 0$ e $(x, y) = (\pm x_0, 0)$ si ottiene

$$A(\pm x_0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 2$: quindi anche P_1 e P_2, quando esistono, sono punti di sella, e dunque instabili.

<u>Esercizio 3.</u> (3.1) Abbiamo il sistema meccanico $\ddot{x} = F(x) = 12x^2 - 6x$, e vale $F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, quindi

$$V(x) = -(4x^3 - 3x^2) + c$$

e perciò basta scegliere $c = 0$ per avere che $V(0) = 0$.
(3.2) Posto $\dot{x} = y$ abbiamo il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) = 12x^2 - 6x \end{cases}$$

Sappiamo che l'energia meccanica è una costante del moto. Infatti posto $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$$

visto che $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ (3.3) Cerchiamo i punti di equilibrio. Abbiamo che $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ se $12x^2 - 6x = 0$, cioè per $x = 0$ oppure $x = 1/2$. Abbiamo perciò i punti di equilibrio

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Sia $A(x, y)$ la matrice del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio (x, y). Si ha

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 24x - 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi per $(x, y) = (0, 0)$ si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori hanno parte reale nulla, quindi l'origine è un centro.
Per $(x, y) = (1/2, 0)$ si ha

$$A(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda = \pm\sqrt{3}$ dunque P_2 è un punto di sella.
(3.4) Abbiamo che $E(3/4, 0) = 0$, dunque nel semipiano superiore $y \geq 0$il moto avviene sulla curva $y = \sqrt{-2V(x)} = \sqrt{8x^3 - 6x^2}$, e quindi dalla prima equazione del sistema troviamo $\dot{x} = \sqrt{8x^3 - 6x^2}$ che si risove per separazione di variabili. Si ha

$$t = \int_{\frac{3}{4}}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x^3 - 6x^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{\frac{3}{4}}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{4}{3}x - 1}}$$

e quindi ponendo $s^2 = \frac{4}{3}x - 1$ si ottiene

$$t = \frac{2}{\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{(4/3)x(t)-1}} \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} = \frac{2}{\sqrt{6}} \arctan\sqrt{(4/3)x(t) - 1}$$

e quindi

$$x(t) = \left(\tan^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t\right) + 1\right)\frac{3}{4}$$

<u>Esercizio 4.</u> (4.1) Posto $\dot{x} = y$ abbiamo il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$$

(4.2) Notiamo che il sistema ammette come energia potenziale la funzione $V(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)$. Infatti vale che $\ddot{x} = -V'(x)$. Quindi una costante del moto è l'energia meccanica

$$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

(4.3) Si ha $\dot{x} = 0$ se $y = 0$, e $\dot{y} = 0$ se $x - \frac{1}{x^3} = 0$ cioè per $x = \pm 1$. Quindi abbiamo due punti di equilibrio

$$P_1 = (1,0), \qquad P_2 = (-1,0)$$

(4.4) Sia $A(x,y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio (x,y). Si ha

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \frac{3}{x^4} & 0 \end{pmatrix}$$

Allora per $(x,y) = (\pm 1, 0)$ si ha

$$A(1,0) = A(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda = \pm 2$ e dunque P_1 e P_2 sono entrambi punti di sella.
(4.5)Le curve di livello della funzione $E(x,y)$ sono curve del tipo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ che sono curve simmetriche rispetto all'asse x e definite solo per le x tali che $V(x) < E$. Quindi basta fare lo studio di funzione di $y = \sqrt{2(E - V(x))}$ al variare di E come parametro e ottenere le curve $y(x) = -\sqrt{2(E - V(x))}$ per riflessione. Se $E < -1$ abbiamo quattro soluzioni di $V(x) = E$, siano x_1, x_2, x_3, x_4 con $x_1 < x_2 < 0$ e $0 < x_3 < x_4$. In questo caso la funzione è definita per valori di x tali che $0 < x < x_3$ o $x > x_4$ oppure $x_2 < x < 0$ o $x < x_1$. Notiamo che $\lim_{x \to 0^\pm} y(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = +\infty$. Inoltre si ha

$$y'(x) = \frac{-V'(x)}{2\sqrt{2(E - V(x))}}$$

dunque la funzione $y(x)$ è crescente per le x tali che $V'(x) < 0$ e decrescente per le x tali che $V'(x) > 0$ e ha gli stessi punti critici di $V(x)$. Studiando la derivata di V otteniamo che $V'(x) > 0$ per $x < -1$ e $x > 1$ mentre $V'(x) < 0$ per $-1 < x < 1$.Inoltre notiamo che $y(x)$ attraversa l'asse x nei punti x_i per $i = 1,2,3,4$ con tangente verticale. Ragionando in modo simile nei casi $E = -1$ e $E > -1$ otteniamo i grafici in figura.
(4.6) La risposta è affermativa. Consideriamo un dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che $E_0 := E(\bar{x}, \bar{y}) < -1$. Possiamo prendere $\bar{y} = 0$ e $\bar{x}$ tale che $V(\bar{x}) = E_0$ e $0 < \bar{x} < 1$. Calcoliamo la soluzione esplicita per tale dato iniziale. Innanzitutto notiamo che il moto si svolge sulla curva di livello

$$y(x) = \sqrt{2E_0 + x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

dove abbiamo scelto arbitrariamente la determinazione positiva della radice.
Dunque sostituendo nella prima equazione del sistema otteniamo $\dot{x} = \sqrt{2E_0 + x^2 + \frac{1}{x^2}}$ che si può risolvere per separazione di variabili. Si ottiene

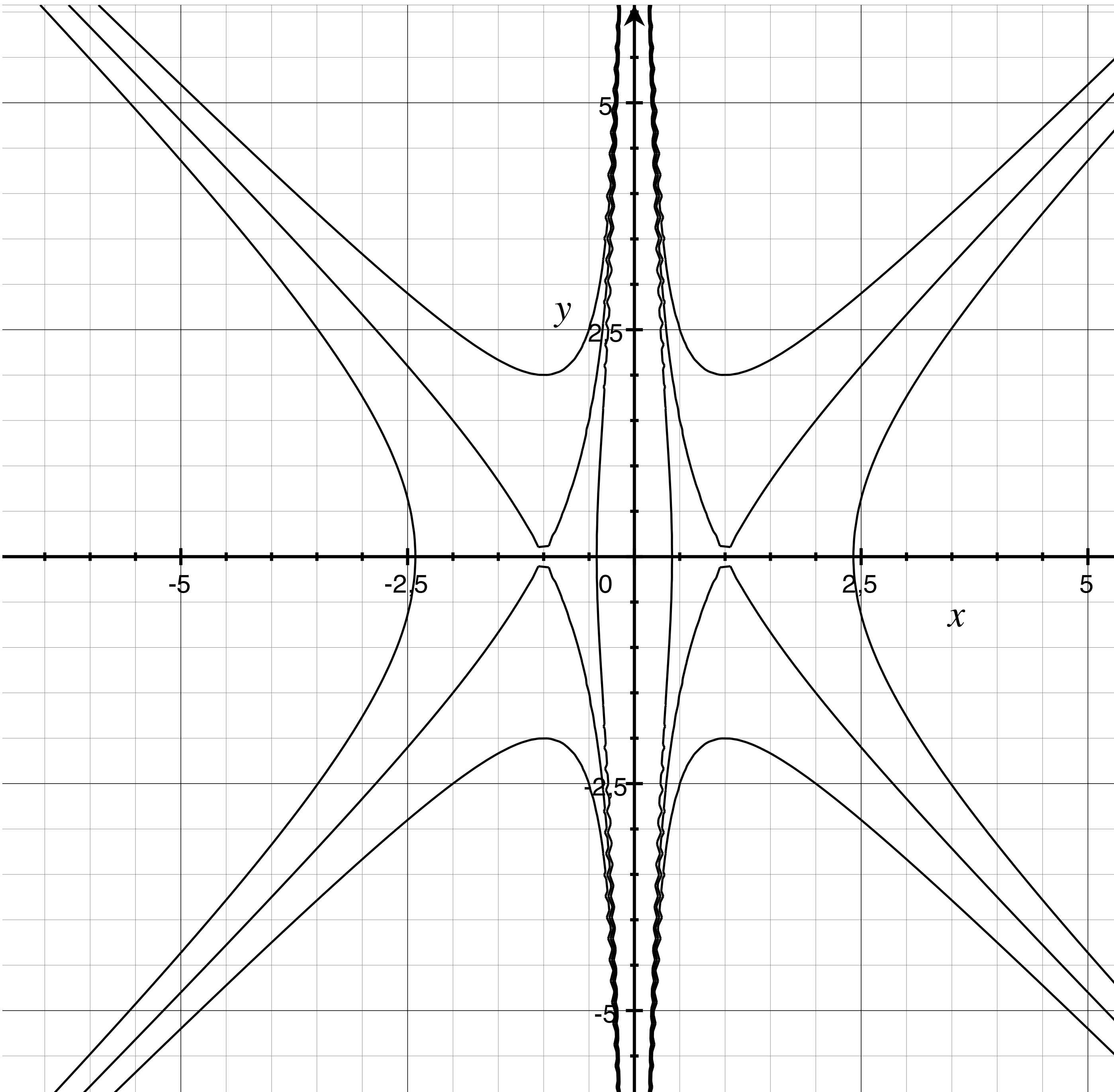
$$t = \int_{\bar{x}}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2E_0 + s^2 + \frac{1}{s^2}}} = \int_{\bar{x}}^{x(t)} \frac{s\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2+E_0)^2 - (E_0^2 - 1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E_0^2 - 1}} \int_{\bar{x}}^{x(t)} \frac{s\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(\frac{s^2+E_0}{\sqrt{E_0^2-1}}\right)^2 - 1}} = -\frac{1}{2}\mathrm{arccosh}\left(\frac{|E_0| - x^2(t)}{\sqrt{E_0^2 - 1}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{arccosh}\left(\frac{|E_0| - \bar{x}^2}{\sqrt{E_0^2 - 1}}\right)$$

e quindi

$$x(t) = \sqrt{-(\sqrt{E_0^2 - 1})\cosh\left(-2t + \mathrm{arccosh}\left(\frac{|E_0| - \bar{x}^2}{\sqrt{E_0^2 - 1}}\right)\right) + |E_0|}$$

Notiamo che esiste un tempo $\bar{t} < 0$ tale che l'argomento della radice si annulla, questo significa che l'intervallo di definizione è $[\bar{t}, +\infty)$. Nonostante questo la funzione in $t = \bar{t}$ non è derivabile, quindi l'intervallo di definizione sarà $(\bar{t}, \infty)$ che non è prolungabile.



y
5
2,5
-2,5
-5
-5
-2,5
0
2,5
5
x