

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012
FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO V - ROBERTO FEOLA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. (1.1) Abbiamo il sistema meccanico $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$ quindi

$$V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$$

Posto $\dot{x} = y$ troviamo che il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \end{cases}$$

Inoltre notiamo che l'energia meccanica è una costante del moto. Infatti posto $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ abbiamo che

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right) = 0$$

dato che $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$.

(1.2) Cerchiamo i punti di equilibrio. Notiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico per il potenziale. Quindi poniamo $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{x^2 - 3}{x^4} = 0, \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Inoltre dal teorema di Dirichelet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli quelli della forma $(x_0, 0)$ con x_0 minimo per $V(x)$. Notiamo che $V'(x) > 0$ per $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$ e $V'(x) < 0$ per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Dunque $x = -\sqrt{3}$ è un massimo mentre $x = \sqrt{3}$ è un minimo, e perciò $(-\sqrt{3}, 0)$ è instabile e $(\sqrt{3}, 0)$ è stabile.

(1.3) Per studiare il grafico dell'energia potenziale notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$$

Questo e lo studio dei massimi e minimi fatto in precedenza è sufficiente per tracciare il grafico.

(1.4) Da $E = y^2/2 + V(x)$ troviamo le curve $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$, che sono simmetriche rispetto all'asse x e definite solo per x tali che $V(x) < E$. Al variare di $E < V(\sqrt{3})$ abbiamo curve aperte che attraversano l'asse delle x con tangente verticale e tali che $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$. Per $V(\sqrt{3}) < E < 0$ abbiamo traiettorie periodiche intorno al punto stabile $(\sqrt{3}, 0)$. Per $0 < E < V(-\sqrt{3})$ abbiamo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. In particolare per $E = V(-\sqrt{3})$ abbiamo che la traiettoria attraversa l'asse delle x con tangente obliqua.

(1.5) Per quanto detto al punto precedente, abbiamo traiettorie periodiche solo per dati iniziali nella regione

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, V(\sqrt{3}) < y^2/2 + V(x) < 0 \right\}$$

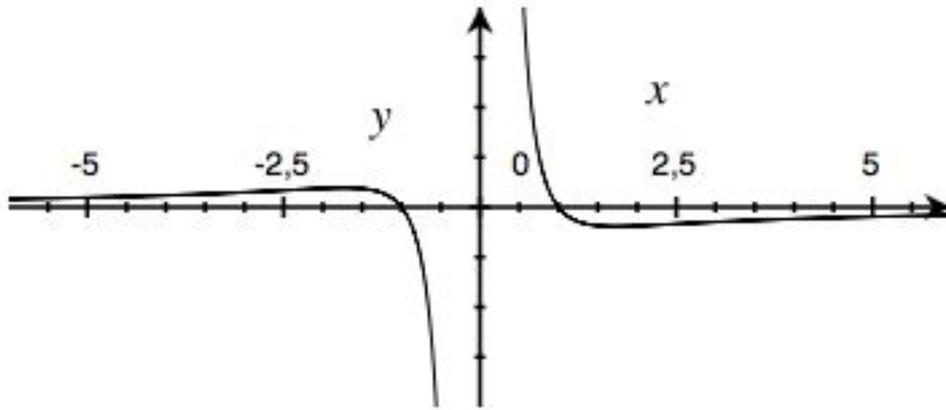


Figura 1: Grafico di $V(x)$

Dunque, visto che $-\frac{3}{8} > -\frac{2}{3\sqrt{3}} = V(\sqrt{3})$, esiste una traiettoria periodica con tale energia. Il moto avviene sulla curva $y = \pm\sqrt{2\left(-\frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}$ e interseca l'asse delle x nei punti

$$x_- = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}, \quad x_+ = 2, \quad a = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$

ma stiamo considerando la traiettoria periodica solo se scegliamo le $x > 1$. Dunque il periodo sarà dato da

$$\begin{aligned} T &= \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2\left(-\frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}} + \int_{x_+}^{x_-} \frac{dx}{-\sqrt{2\left(-\frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}} = \\ &= \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\left(-\frac{3}{8} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}} \end{aligned}$$

Poniamo $-\frac{3}{8} - V(x) = \phi(x)(x - x_-)(x_+ - x)$. Sappiamo che vale la stima

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{2}{c_2}} \leq T \leq T_2 = \pi\sqrt{\frac{2}{c_1}}$$

con c_1, c_2 costanti tali che $c_1 \leq \phi(x) \leq c_2$, per $x \in [x_-, x_+]$. Abbiamo che

$$-\frac{3}{8} - V(x) = (2 - x) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{3}\right) \phi(x), \quad \phi(x) = \frac{1}{8x^3} \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{3}\right)$$

Notiamo che $\phi(x)$ per $x \in [x_-, x_+]$ ammette massimo e minimo, possiamo scegliere quindi le due costanti in quel modo e ottenere la stima voluta.

ESERCIZIO 2. Abbiamo che $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, dunque l'equazione diventa

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 = -x_1 + x_1|\mathbf{x}|^2 \\ m\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 = -x_2 + x_2|\mathbf{x}|^2 \end{cases}$$

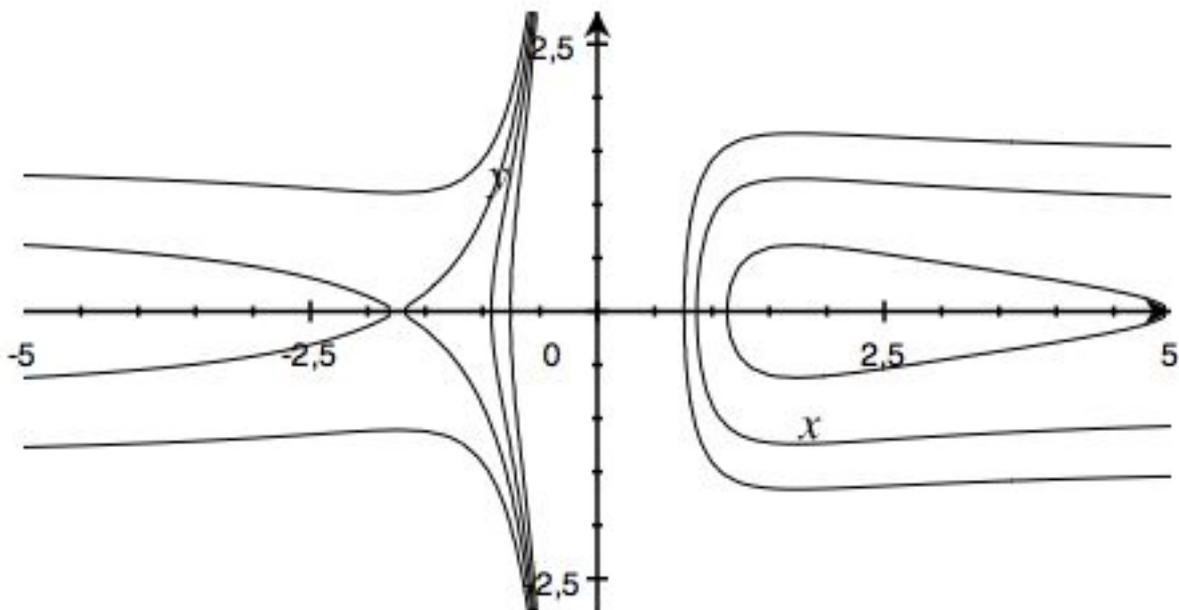


Figura 2: Piano delle fasi

Poniamo $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ e troviamo che il sistema è dato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_1 = \frac{1}{m}(-x_1 + x_1|\mathbf{x}|^2) - \frac{\gamma}{m}y_1 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{m}(-x_2 + x_2|\mathbf{x}|^2) - \frac{\gamma}{m}y_2 \end{cases}$$

Cerchiamo i punti di equilibrio. Dalla prima e dalla seconda notiamo che si deve avere $(y_1, y_2) = (0, 0)$, dunque nella terza poniamo $(1/m)x_1(|\mathbf{x}|^2 - 1) = 0$. Se $x_1 = 0$ allora dalla quarta equazione troviamo $x_2 = 0$ o $x_2 = \pm 1$. Se nella quarta prendiamo $x_2 = 0$ troviamo nella terza $x_1 = 0$. Infine nella terza possiamo considerare $|\mathbf{x}|^2 = 1$, in questo caso la quarta equazione è automaticamente verificata. Dunque abbiamo i punti di equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $(t, s, 0, 0)$ con t, s tali che $t^2 + s^2 = 1$.

Calcoliamo ora la matrice del sistema linearizzato:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} + |\mathbf{x}|^2 + 2x_1^2 & 0 & -\frac{\gamma}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} + |\mathbf{x}|^2 + 2x_2^2 & 0 & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}$$

che intorno al punto di equilibrio $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è

$$A(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} & 0 & -\frac{\gamma}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} & 0 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & -\frac{\gamma}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= -\lambda \left[-\lambda \left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda \right)^2 + \frac{1}{m} \left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda \right) \right] + \left[\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{m} \left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda \right) \right] = \left[-\lambda \left(-\frac{\gamma}{m} - \lambda \right) + \frac{1}{m} \right]^2 = 0
 \end{aligned}$$

Quindi per trovare gli autovalori risolviamo l'equazione

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0$$

e troviamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4m}}{2m}$$

Notiamo che indipendentemente dal valore di $\gamma^2 - 4m$ la parte reale dei due autovalori è negativa, dunque il punto $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3. (3.1) Una condizione sufficiente affinché una funzione $H(x, y)$ sia una costante del moto è

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo

$$H(x, y) = x^4 y + y^5 + 2x^2 y^3 - 16x^2 y + f(x)$$

e per determinare $f(x)$ deriviamo rispetto a x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 4x^3 y + 4xy^3 - 32xy + f'(x)$$

quindi basta porre $f'(x) = 0$, cioè $f(x) = c$, per avere che una costante del moto è

$$H(x, y) = x^4 y + y^5 + 2x^2 y^3 - 16x^2 y$$

ponendo $c = 0$.

(3.2) Per trovare i punti di equilibrio risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^4 + 5y^4 + 6x^2 y^2 - 16x^2 = 0 \\ -xy(4x^2 + 4y^2 + 32) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo nella seconda $y = 0$ otteniamo dalla prima $x^4 - 16x^2 = 0$, cioè $x = 0, x = \pm 4$. Se consideriamo nella seconda $x = 0$ troviamo dalla prima che $y = 0$. Se infine consideriamo $4x^2 + 4y^2 = 32$ troviamo nella prima $48y^2 - 64 = 0$, cioè $y = \pm\sqrt{4/3}$ e dunque $x = \pm\sqrt{20/3}$. Poniamo $c = 2/\sqrt{3}$ dunque i punti di equilibrio sono

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{1,2} = (\pm 4, 0), \quad P_{3,4} = (\pm c\sqrt{5}, c), \quad P_{5,6} = (\pm c\sqrt{5}, c)$$

Per studiarne la stabilità consideriamo la matrice del sistema linearizzato

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 12xy^2 - 32x & 20y^3 + 12x^2 y \\ -(12x^2 y + 4y^3 - 32y) & -(4x^3 + 12xy^2 - 32x) \end{pmatrix}$$

Intorno ai punti di equilibrio abbiamo

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui non otteniamo informazioni. Invece

$$A(\pm 4, 0) = \begin{pmatrix} \pm 4^3 2 & 0 \\ 0 & \mp 4^3 2 \end{pmatrix}$$

e perciò i punti sono instabili dato che abbiamo sempre un autovalore positivo.

$$A(c\sqrt{5}, c) = \begin{pmatrix} 32c\sqrt{5}(c^2 - 1) & 80c^3 \\ -32c(2c^2 - 1) & -32c\sqrt{5}(c^2 - 1) \end{pmatrix}$$

che ha due autovalori con parte reale nulla, dunque non possiamo dire nulla. Procedendo allo stesso modo negli altri casi troviamo sempre autovalori con parte reale nulla. Cerchiamo quindi una funzione di Ljapunov per tali punti. Notiamo che

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}$$

Dunque posto $W = H - H(c\sqrt{5}, c)$ abbiamo che l'hessiano di W sarà

$$\mathcal{H}(c\sqrt{5}, c) = \begin{pmatrix} 32c(2c^2 - 1) & 32c\sqrt{5}(c^2 - 1) \\ 32c\sqrt{5}(c^2 - 1) & 80c^3 \end{pmatrix}$$

allora $(c\sqrt{5}, c)$ è un minimo per W e perciò è stabile. Ripetendo lo stesso ragionamento fatto per P_3 concludiamo che i punti P_3, P_4, P_5 e P_6 sono tutti stabili. Per il momento tralasciamo lo studio di $(0, 0)$, per riprenderlo in seguito.

(3.3) Per studiare le curve di livello incominciamo dalle separatrici, cioè studiamo le curve all'altezza dei punti instabili. Abbiamo che $H(4, 0) = 0$. Sia $\Gamma_0 = \{(x, y) : H(x, y) = 0\}$.

Scriviamo

$$\begin{aligned} H(x, y) &= x^4 y + y^5 + 2x^2 y^3 - 16x^2 y = y(x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 16x^2) = y((x^2 + y^2)^2 - 16x^2) = \\ &= y(x^2 + y^2 - 4x)(x^2 + y^2 + 4x) = 0 \end{aligned}$$

Quindi notiamo subito che sono l'asse delle x e due circonferenze di raggio 2 centrate rispettivamente in $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Per dipendenza continua dal dato iniziale tracciamo le altre curve di livello.

Analizziamo ora i versi di percorrenza sulla curva Γ_0 . Su $y = 0$ abbiamo che $\dot{x} > 0$ se $x < -4$ e $x > 4$ mentre $\dot{x} < 0$ se $-4 < x < 4$. Per dipendenza differenziabile dai dati iniziali abbiamo che nel semipiano $y > 0$ i versi di percorrenza delle traiettorie periodiche sono in senso orario mentre in $y < 0$ sono in senso antiorario. Quindi concludiamo che sulla curva $x^2 + y^2 - 4x = 0$ $\dot{x} > 0$ se $y > 0$ e $\dot{x} < 0$ se $y < 0$. Notiamo inoltre che lungo certe direzioni ci avviciniamo al punto $(0, 0)$ mentre certe altre ci allontaniamo, dunque possiamo concludere che l'origine è un punto instabile.

(3.4) Sappiamo che se esiste una regione U racchiusa in una componente connessa di una curva di livello chiusa di H che contenga un unico punto di equilibrio x_0 stabile, allora ogni traiettoria $\pi(t, \bar{x})$, con $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$ è periodica e si svolge su un'orbita che contiene x_0 . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4, 0 < y < \sqrt{4 - (x - 2)^2} \right\} \\ U_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4, -\sqrt{4 - (x - 2)^2} < y < 0 \right\} \\ U_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 < x < 0, 0 < y < \sqrt{4 - (x + 2)^2} \right\} \\ U_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 < x < 0, -\sqrt{4 - (x + 2)^2} < y < 0 \right\} \end{aligned}$$

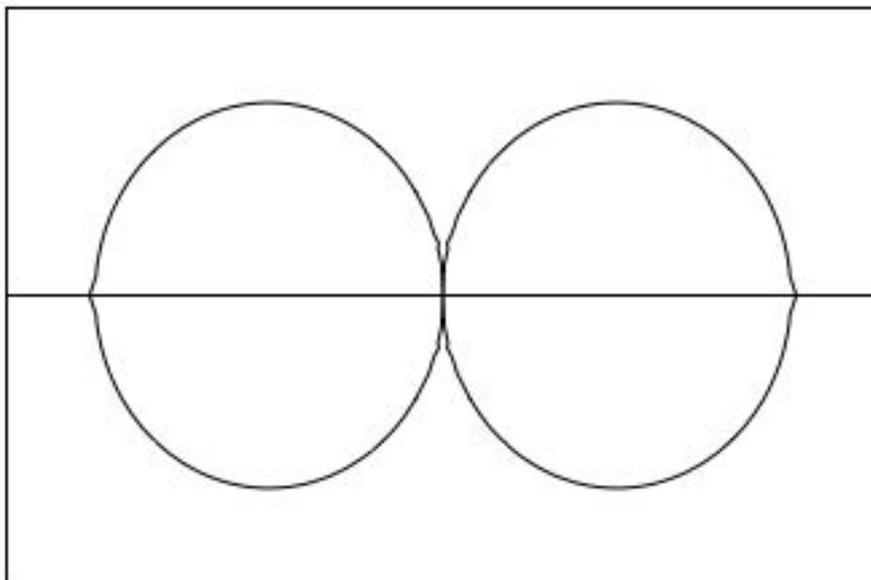


Figura 3: Curva Γ_0

ESERCIZIO 4. (4.1) **Equazioni del sistema associato.** Abbiamo $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$. Quindi posto $y = \dot{x}$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx} = -e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-x^4 - \alpha + 1 - \frac{\alpha}{x^2} \right) = -e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{-x^4 - x^2(\alpha - 1) - \alpha}{x^2} \right) \end{cases}$$

(4.2) **Punti di equilibrio e stabilità** Sappiamo che i punti di equilibrio sono del tipo $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico del potenziale. Cominciamo col distinguere i casi $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$ e studiamo $V'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow V'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) \\ \alpha \neq 0 &\Rightarrow V'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{-x^4 - x^2(\alpha - 1) - \alpha}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Quindi per $\alpha = 0$ abbiamo due le soluzioni $x = \pm 1$, un massimo e un minimo per V . Se $\alpha \neq 0$ abbiamo

$$\begin{cases} \alpha < 0 \Rightarrow & x^2 = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2} & x = \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2}} \\ 0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & x^2 = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2} & x = \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2}} \\ \alpha = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & x^2 = \sqrt{2} - 1 & x = \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ \alpha > 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & x^2 = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2} & \text{no sol.} \end{cases}$$

Sappiamo che i punti di equilibrio stabili sono punti $(x_0, 0)$ con x_0 minimo per il potenziale. Per $\alpha = 0$ abbiamo un punto stabile e uno instabile. Se $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ abbiamo che $V'(x)$ è

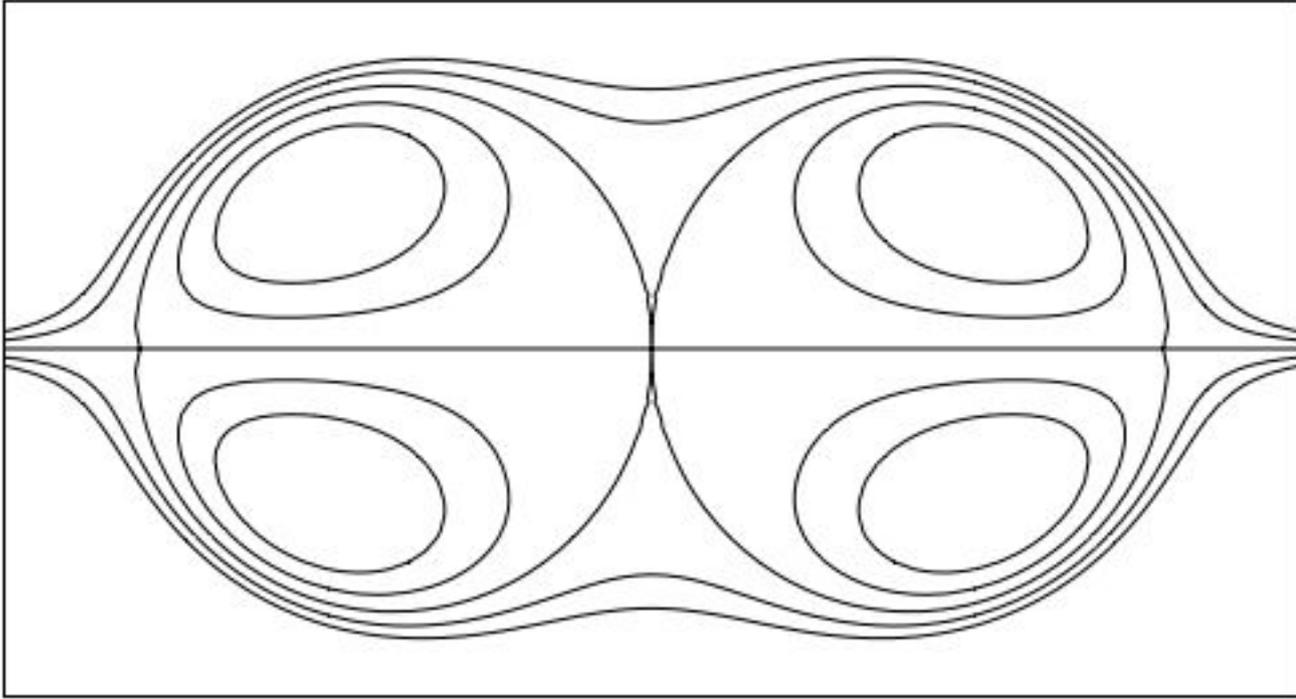


Figura 4: curve di livello di $H(x, y)$

sempre negativa, quindi $x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ sono dei flessi, perciò instabili. Per $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$ abbiamo 4 punti di equilibrio. Poniamo

$$\lambda_1 = \frac{\alpha - 1 + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha - 1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\alpha}}{-2}$$

e notiamo che $V' > 0$ se $-\sqrt{\lambda_2} < x < -\sqrt{\lambda_1}$ o se $\sqrt{\lambda_1} < x < \sqrt{\lambda_2}$ e $V' < 0$ altrimenti. Quindi abbiamo due massimi e due minimi e perciò $(\sqrt{\lambda_1}, 0)$ e $(-\sqrt{\lambda_2}, 0)$ sono stabili. Per $\alpha < 0$ abbiamo i punti critici $x = \pm\sqrt{\lambda_2}$ e vediamo che $V' > 0$ per $-\sqrt{\lambda_2} < x < \sqrt{\lambda_2}$ e quindi si ha un massimo in $x = \sqrt{\lambda_2}$, perciò $(\sqrt{\lambda_2}, 0)$ è instabile, e un minimo in $x = -\sqrt{\lambda_2}$ e quindi $(-\sqrt{\lambda_2}, 0)$ è stabile.

(4.3) **Grafico potenziale.** Per $\alpha = 0$ abbiamo che $V(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$$

il grafico sarà perciò

Se $\alpha \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$$

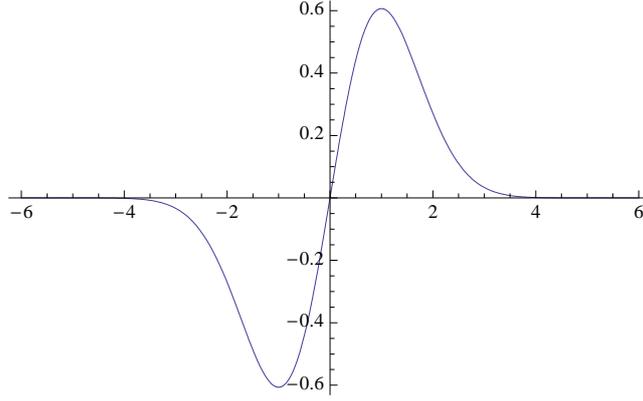


Figura 5: Grafico di $V(x)$ per $\alpha = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha < 0 \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \mp \infty \\ 0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \pm \infty \\ \alpha = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \pm \infty \\ \alpha > 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} V(x) = \pm \infty \end{array} \right.$$

Abbiamo studiato già la natura dei punti critici del potenziale nella discussione sulla stabilità dei punti di equilibrio.

(2.4) **Piano delle fasi** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ e notiamo che $y' = \frac{-V'(x)}{2\sqrt{2(E - V(x))}}$. Quindi le curve $y(x)$ avranno dei massimi nei minimi di $V(x)$ e dei minimi nei massimi del potenziale, inoltre le curve sono simmetriche rispetto all'asse x . Consideriamo il caso $\alpha = 0$. Per $V_{min} < E < 0$ avremo traiettorie periodiche intorno al punto di minimo, per $E = 0$ si ha una traiettoria tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$. Per $0 < E < V_{max}$ avremo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, per $E = V_{max}$ avremo traiettorie che intersecano l'asse x con tangente obliqua. Per $\alpha < 0$ con $E < 0$ avremo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$ e periodiche intorno al punto di equilibrio stabile. Se $0 < E < V_{max}$ abbiamo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. Se $E = V_{max}$ abbiamo una traiettoria che interseca con tangente obliqua l'asse delle x . Per $E > V_{max}$ di nuovo si hanno traiettorie con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$. Prendiamo ora $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$. Per $V(-\sqrt{\lambda_2}) < E < V(-\sqrt{\lambda_1})$ abbiamo traiettorie periodiche intorno a $(-\sqrt{\lambda_2}, 0)$ e traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$. Per $E = V_{-\sqrt{\lambda_1}}$ abbiamo una traiettoria che interseca l'asse x con tangente obliqua. Per $E = 0$ abbiamo una traiettoria tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \pm\infty$. Per $0 < E < V(\sqrt{\lambda_1})$ si hanno traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$. Avremo poi traiettorie periodiche intorno a $(\sqrt{\lambda_1}, 0)$ mentre per $E = V(\sqrt{\lambda_2})$ la traiettoria interseca l'asse x con tangente obliqua.

Per $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ avremo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$ per $E < -\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Per $E = -\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ avremo una traiettoria che forma una cuspidine con l'asse x . Si ha una cuspidine in $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ per $E = V(\sqrt{\sqrt{2} - 1})$. Per gli altri livelli di energia si hanno traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$.

Se infine $\alpha > 3 - 2\sqrt{2}$ non abbiamo punti di equilibrio e quindi avremo traiettorie tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$, e $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$.

(4.5) **Traiettorie periodiche.** Abbiamo traiettorie periodiche solo per $\alpha \leq 0$ e $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$. Se $\alpha = 0$ abbiamo periodicità per i dati iniziali in

$$U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, V(-1) < y^2/2 + V(x) < 0\}$$

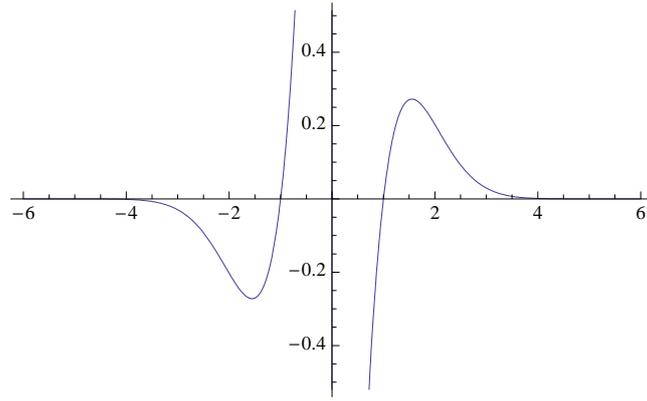


Figura 6: Grafico di $V(x)$ per $\alpha < 0$

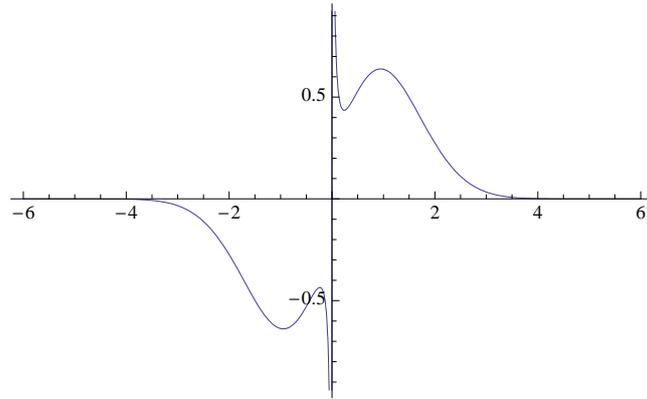


Figura 7: Grafico di $V(x)$ per $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$

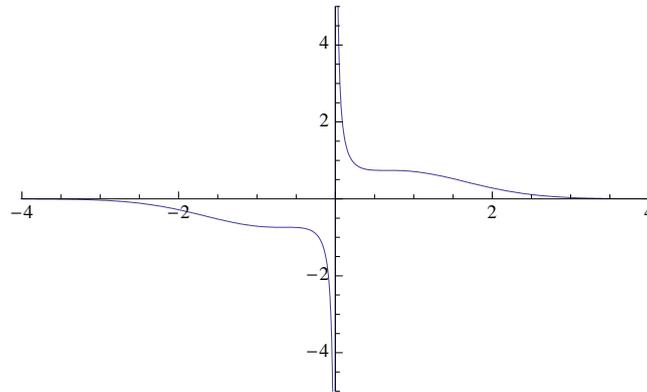


Figura 8: Grafico di $V(x)$ per $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$

Se $\alpha < 0$ i dati iniziali opportuni sono nella regione

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, V(-\sqrt{\lambda_2}) < y^2/2 + V(x) < 0 \right\}$$

Se $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$ abbiamo le regioni

$$U_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{\lambda_1}, V(-\sqrt{\lambda_2}) < y^2/2 + V(x) < 0 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x < \sqrt{\lambda_2}, V(\sqrt{\lambda_1}) < y^2/2 + V(x) < V(\sqrt{\lambda_2}) \right\}$$

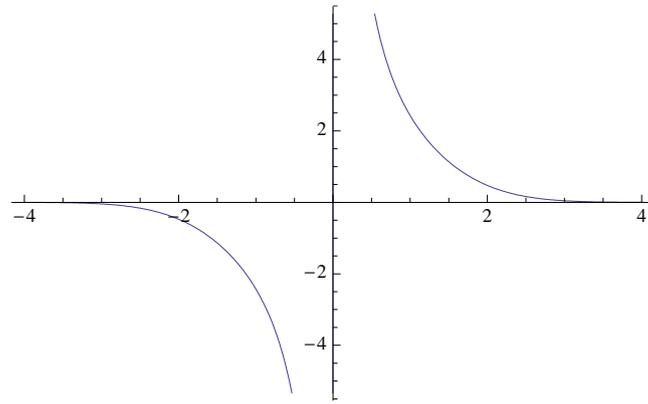


Figura 9: Grafico di $V(x)$ per $\alpha > 3 - 2\sqrt{2}$

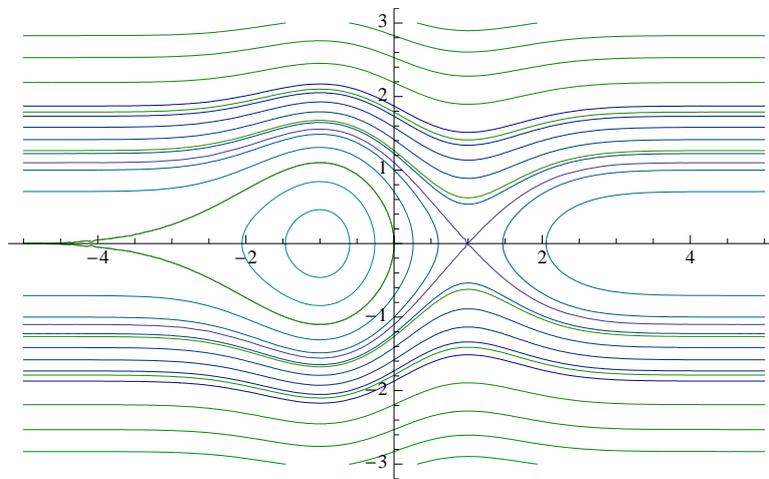


Figura 10: Piano delle fasi per $\alpha = 0$

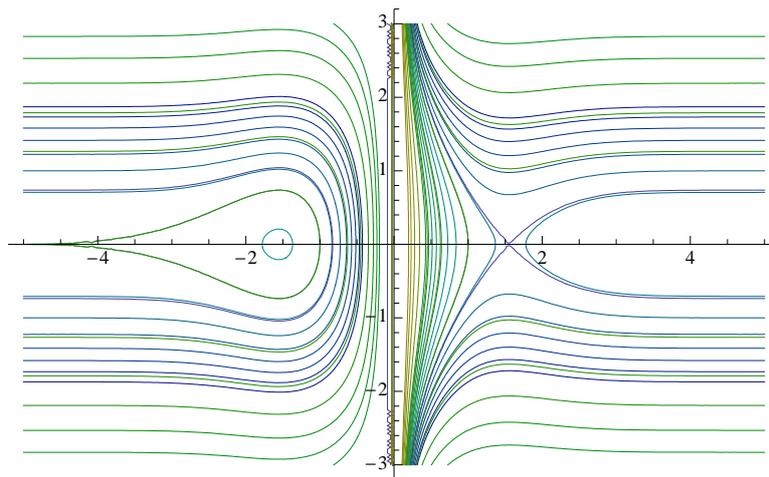


Figura 11: Piano delle fasi per $\alpha < 0$

con x_1 tale che $0 = \sqrt{2(V(\sqrt{\lambda_2}) - V(x_1))}$.

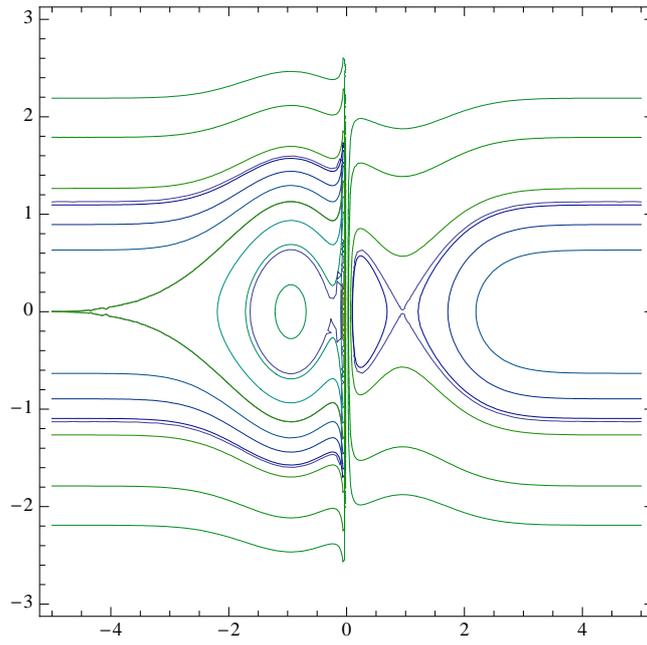


Figura 12: Piano delle fasi per $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$

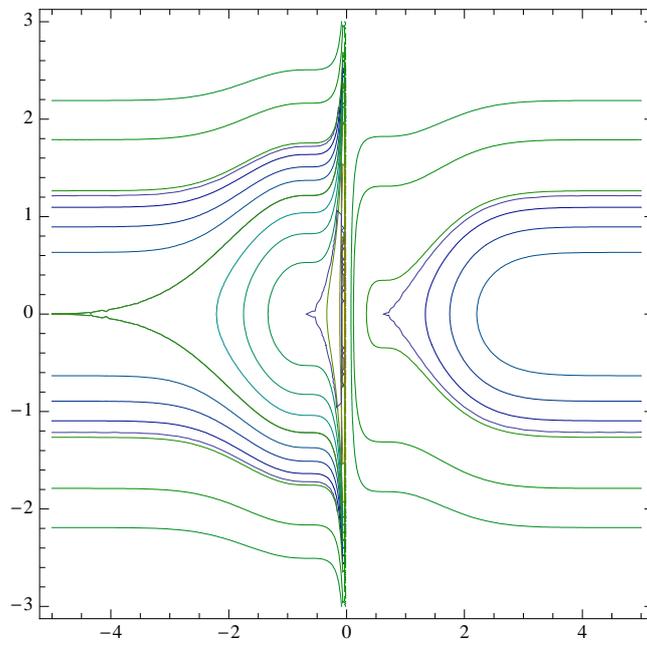


Figura 13: Piano delle fasi per $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$

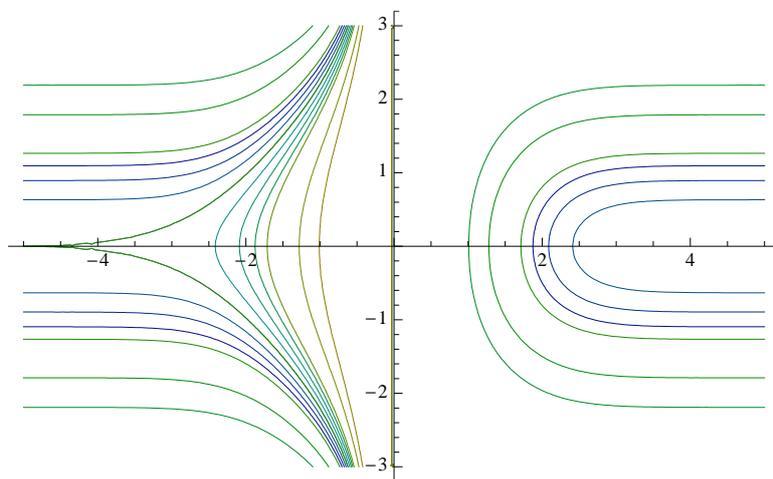


Figura 14: Piano delle fasi per $\alpha > 3 - 2\sqrt{2}$