

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**

TUTORATO VI - ROBERTO FEOLA (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Poniamo  $\mathbf{r} = \mathbf{x}$  e notiamo che l'equazione che descrive il moto è

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(1 - |\mathbf{r}|^2)$$

dunque è facile osservare che il momento angolare del sistema,  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$  si conserva, cioè  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$  per le proprietà del prodotto vettoriale. In questo caso abbiamo che il moto avviene su un piano ortogonale al momento angolare, quindi è possibile scegliere un sistema di coordinate in cui l'asse  $z$  è diretto lungo la direzione di  $\mathbf{L}$ . Abbiamo dunque  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ , allora possiamo introdurre le coordinate polari

$$\begin{cases} r_1 = \rho \cos \theta \\ r_2 = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Calcoliamo il modulo del momento angolare

$$L = |\mathbf{L}| = |[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]| = |[(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0), (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta, 0)]| = \rho^2 \dot{\theta}$$

quindi la conservazione di  $L$  ci dà

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2}$$

Quindi conoscendo la dipendenza da  $t$  di  $\rho(t)$  è possibile ricavare la funzione  $\theta(t)$  per integrazione. Studiamo l'evoluzione della variabile radiale. Sappiamo che il sistema ammette un'altra costante del moto, l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r})$$

che nelle nuove coordinate diventa

$$E = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + U(\rho)$$

Usando l'equazione di  $\dot{\theta}$  troviamo

$$E = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho)$$

dove  $V_{eff}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = -\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} + \frac{L^2}{2\rho^2}$ . L'equazione che descrive il moto della variabile radiale sarà data da

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -\left(-\rho + \rho^3 - \frac{L^2}{\rho^3}\right)$$

che possiamo studiare come un sistema unidimensionale di energia potenziale  $V_{eff}(\rho)$  per  $\rho > 0$ . Infatti ponendo  $y = \dot{\rho}$  troviamo

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\left(\frac{-\rho^4 + \rho^6 - L^2}{\rho^3}\right) \end{cases}$$

Abbiamo che esiste un unico  $\rho_+ > 0$  tale che  $-r_+^4 + \rho_+^6 - L^2 = 0$ . Quindi abbiamo il punto di equilibrio  $(\rho_+, 0)$ . Notiamo che

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

Dunque abbiamo che il punto  $\rho_+$  è un minimo per  $V_{eff}$  e dunque  $(\rho_+, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema.

Da  $E = \frac{1}{2}y^2 + V_{eff}(\rho)$  troviamo che le traiettorie sono date da  $y = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$ . Sono curve definite solo per valori di  $\rho$  tali che  $V_{eff}(\rho) < E$ , dunque abbiamo il moto solo per valori dell'energia  $E > V_{eff}(\rho_+)$ , e in quel caso abbiamo traiettorie periodiche intorno al punto di equilibrio stabile  $(\rho_+, 0)$ . Inoltre per studiare i versi di percorrenza abbiamo che  $\dot{\rho} > 0$  se  $y > 0$  dunque il punto si muove sulle curve di livello in senso orario.

**ESERCIZIO 2. 2.1** Sapendo che  $m = 1$  e che

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho} = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right) + \frac{L^2}{2\rho}$$

le equazioni di Newton diventano

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho^2 + 2)}$$

e dunque le equazioni del sistema dinamico associato sono

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{6\rho^4 - 2\rho^2(2 + 3L^2) - 4L^2}{2\rho^3(3\rho^2 + 2)} \end{cases}$$

**2.2 Equilibrio e stabilità.** I punti di equilibrio sono del tipo  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico di  $V_{eff}$ . Perciò da  $V'_{eff}(\rho) = 0$  e ricordando che  $\rho$  è un raggio e perciò positivo, abbiamo

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(2 + 3L^2) + \sqrt{(2 + 3L^2)^2 + 24L^2}}{6}}$$

che è un minimo. Perciò, ricordando che i punti del tipo  $(\rho_0, 0)$  sono stabili se e solo se  $\rho_0$  è un minimo per il potenziale, abbiamo un unico punto di equilibrio stabile.

**2.3 Grafico potenziale.** Abbiamo già studiato la derivata di  $V_{eff}$  perciò, visto che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

possiamo disegnare il grafico di  $V_{eff}$

**2.4 Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm \sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$ . Quindi per  $E = V_{eff}(\rho_0)$  abbiamo il solo punto di equilibrio, per  $E > V_{eff}(\rho_0)$  avremo traiettorie periodiche intorno al punto stabile.

**2.5 Traiettorie periodiche.** Dal punto precedente notiamo che per  $\rho > 0$  e per valori di  $E > V_{eff}(\rho_0)$  si hanno traiettorie periodiche.

**ESERCIZIO 3.** Siano  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$  e  $V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2\mu}$  e supponiamo  $L \neq 0$ . Ci riconduciamo allo studio del sistema meccanico  $\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}V_{eff}(\rho)$  e quindi al sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{d}{d\rho}V_{eff}(\rho) \end{cases}$$

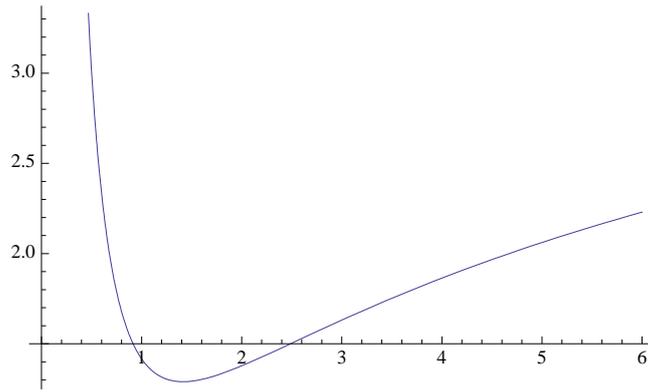


Figura 1: Grafico di  $V_{eff}(\rho)$  (es 2)

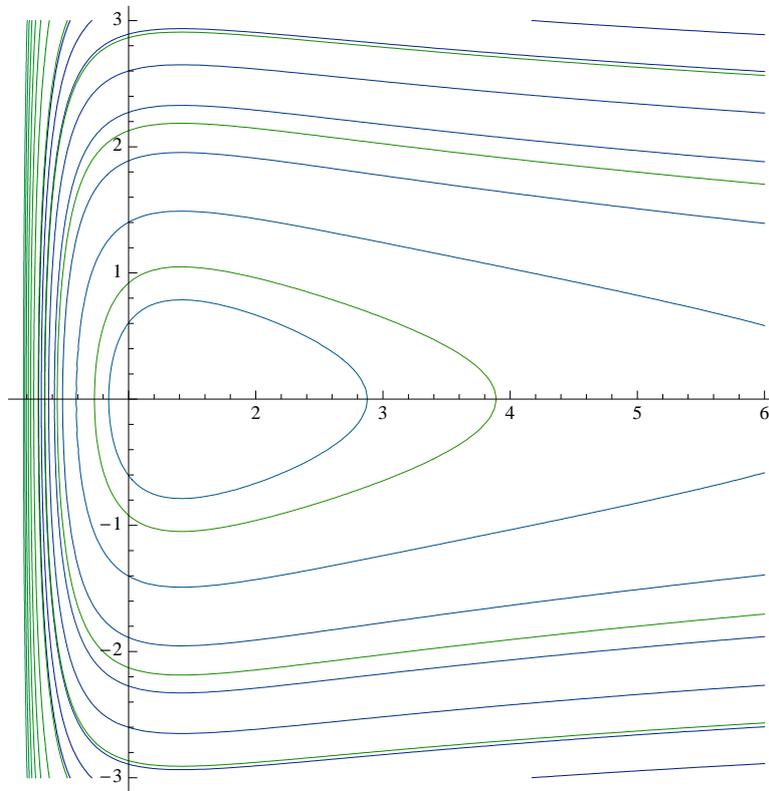


Figura 2: Piano delle fasi  $(\rho, \dot{\rho})$  (es 2)

Studiamo per  $\rho > 0$  il potenziale  $V_{eff}$  come nel caso dei sistemi meccanici unidimensionali.

$$V_{eff}(\rho) = \log \rho - \frac{2\alpha}{\rho^4} + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

Osserviamo primariamente che indipendentemente da  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) &= +\infty \\ \frac{d}{d\rho} V_{eff}(\rho) &= \frac{1}{\rho} + \frac{8\alpha}{\rho^5} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0 \\ \Leftrightarrow \rho^4 - L^2\rho^2 + 8\alpha &= 0 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 32\alpha}}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre casi da discutere:

- ( $L^4 - 32\alpha > 0$ ) Adottiamo la seguente notazione:

$$\rho_{\pm} = \sqrt{\frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 32\alpha}}{2}}$$

Si aprono i seguenti tre sottocasi:

1.  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} > 0 \Rightarrow \alpha > 0$ , quindi  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho)$  ha quattro radici reali distinte  $\pm\rho_{\pm}$ , in particolare  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) = (\rho - \rho_-)(\rho + \rho_-)(\rho - \rho_+)(\rho + \rho_+)$  con  $-\rho_- < -\rho_+ < 0 < \rho_- < \rho_+$ . Quindi  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq -\rho_- \vee -\rho_+ < \rho < \rho_- \vee \rho > \rho_+$ , e considerando solo  $\rho > 0$ , abbiamo che  $\rho_-$  è massimo e  $\rho_+$  minimo per il potenziale efficace, quindi  $(\rho_-, 0)$  è instabile e  $\rho_+$  stabile. Poi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} Veff(\rho) = -\infty$$

Osservando che  $\frac{d^2}{d\rho^2} Veff(\rho_-) \neq 0$  perché  $\rho_-$  è uno zero semplice per  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho)$ , questo basta per uno studio qualitativo delle curve di livello che possiamo tracciare.

2.  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} < 0 \Rightarrow \alpha < 0$ , quindi abbiamo due radici reali,  $\pm\rho_+$ , e due complesse coniugate,  $\pm\rho_-$ , puramente immaginarie. Quindi  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) = (\rho^2 - \rho_-^2)(\rho - \rho_+)(\rho + \rho_+)$ , dove  $\rho^2 - \rho_-^2 > 0$ . Si ha quindi  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq \rho_+$ . Segue che  $\rho_+$  è un minimo e quindi per il criterio di Dirichlet  $(\rho_+, 0)$  è un punto di equilibrio stabile. Infine:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} Veff(\rho) = +\infty$$

e possiamo disegnare il potenziale e le curve di livello.

3.  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ . Abbiamo quindi quattro radici reali, ma  $\pm\rho_- = 0$ , allora  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) = \rho^2(\rho - \rho_+)(\rho + \rho_+)$  e  $\frac{d}{d\rho} Veff(\rho) \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq \rho_+$ , poi valgono le stesse considerazioni del caso (b).

- ( $L^4 - 32\alpha = 0$ )  $\alpha = \frac{L^4}{32}$ ,  $\rho = \pm\sqrt{\frac{L^2}{2}}$ , quindi l'unico punto critico positivo è  $\rho = \sqrt{\frac{L^2}{2}}$ . Pochè

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} Veff(\rho) = -\infty$$

il punto in questione deve essere un flesso ascendente, da cui abbiamo una cuspidine nel punto  $(\sqrt{\frac{L^2}{2}}, 0)$  nel piano  $xy$ .

- ( $L^4 - 32\alpha < 0$ ) La derivata del potenziale efficace non si annulla mai, quindi non abbiamo punti critici.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} Veff(\rho) = -\infty$$

quindi il potenziale è strettamente crescente.

Se  $L = 0$  il moto avviene su una retta, e in questo caso si studia il moto unidimensionale con  $\rho \in \mathbb{R}$ .

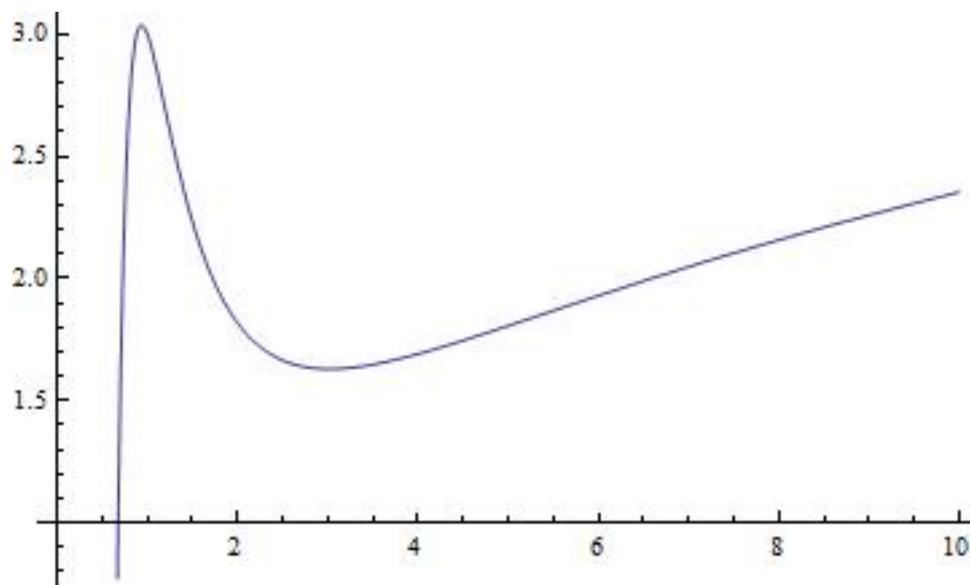


Figura 3: (es 3) Grafico del potenziale per  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} > 0$

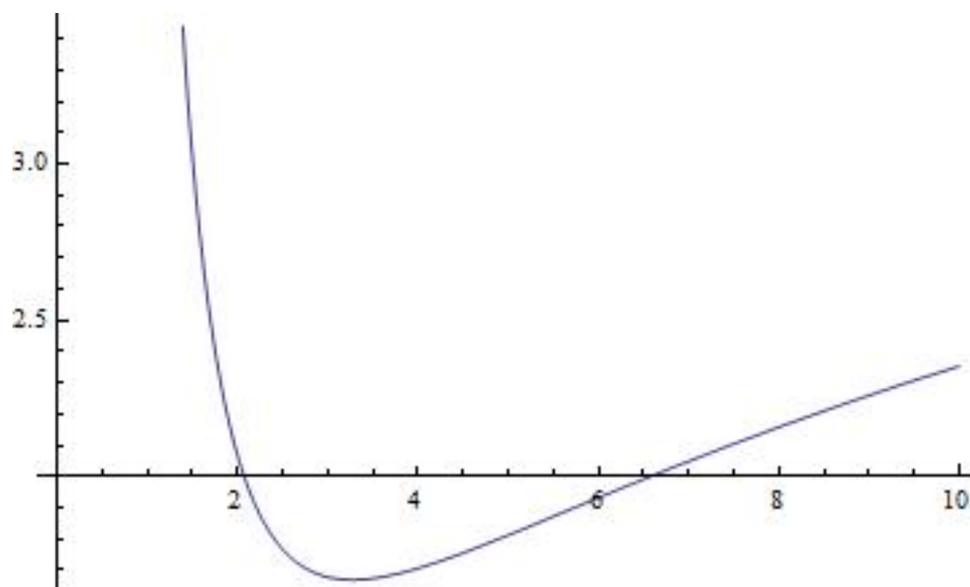


Figura 4: (es 3) Grafico del potenziale per  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} \leq 0$

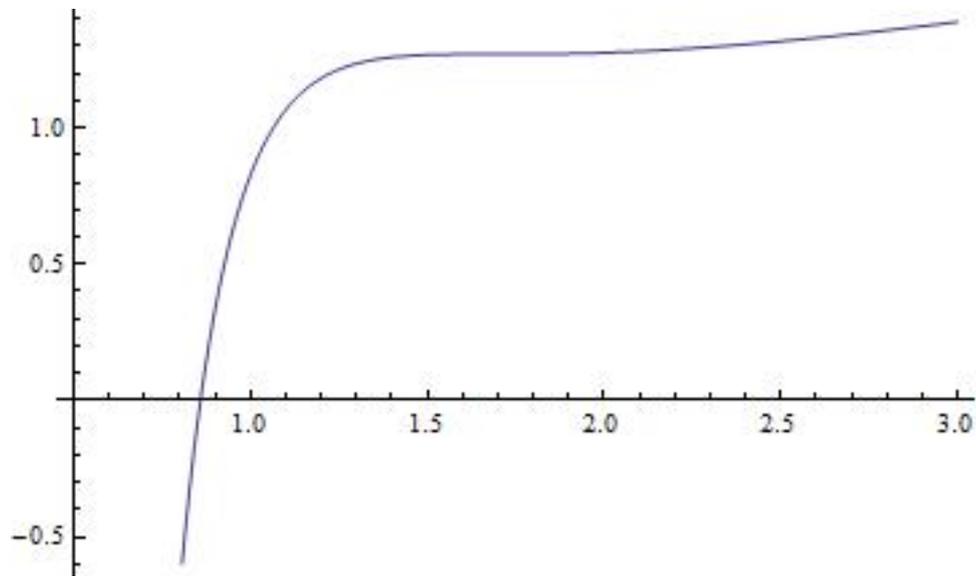


Figura 5: (es 3) Grafico del potenziale per  $L^4 - 32\alpha = 0$

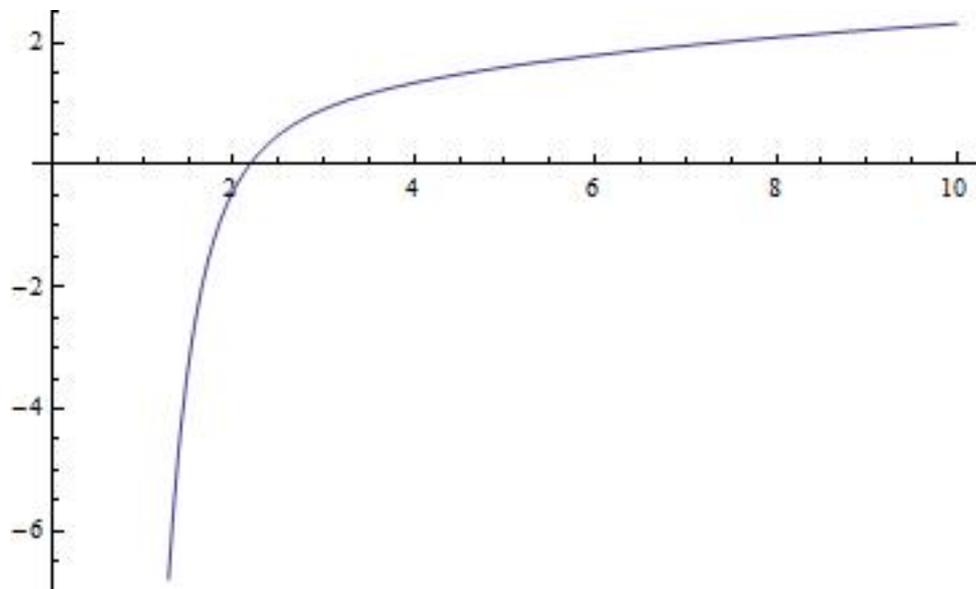


Figura 6: (es 3) Grafico del potenziale per  $L^4 - 32\alpha < 0$

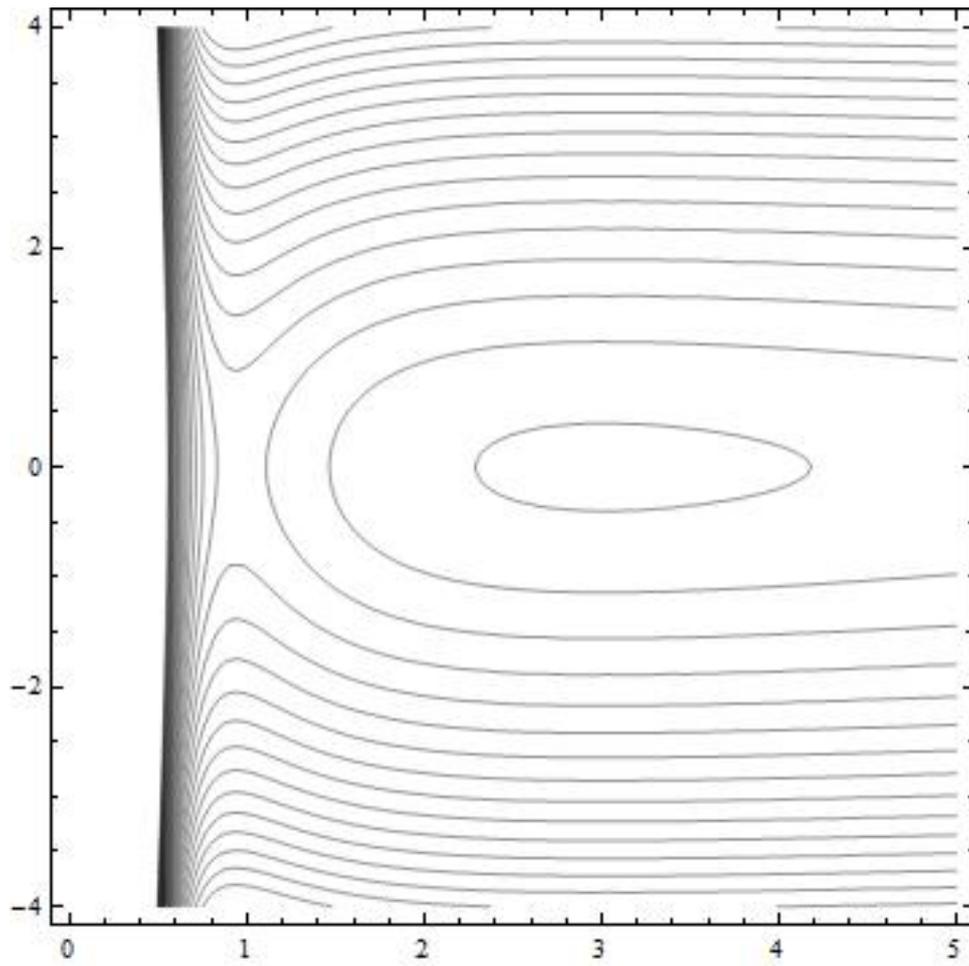
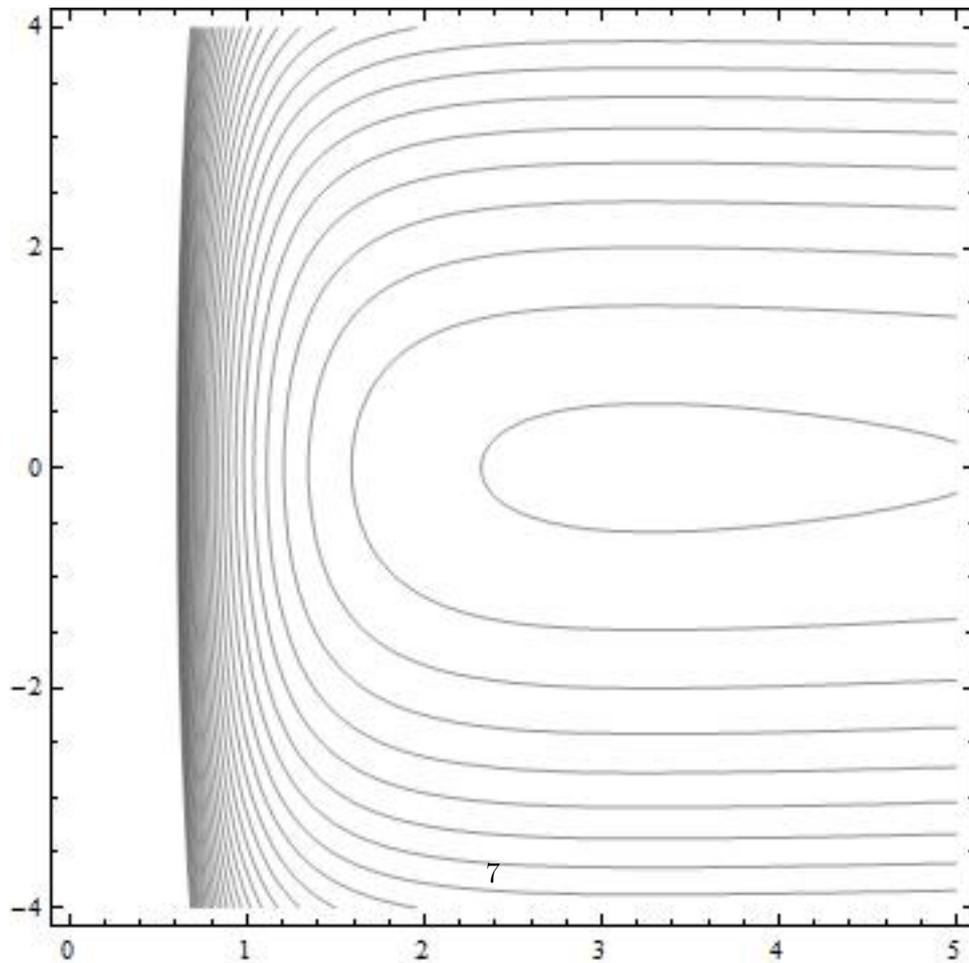


Figura 7: (es 3) Piano delle fasi per  $L^2 - \sqrt{L^4 - 32\alpha} > 0$



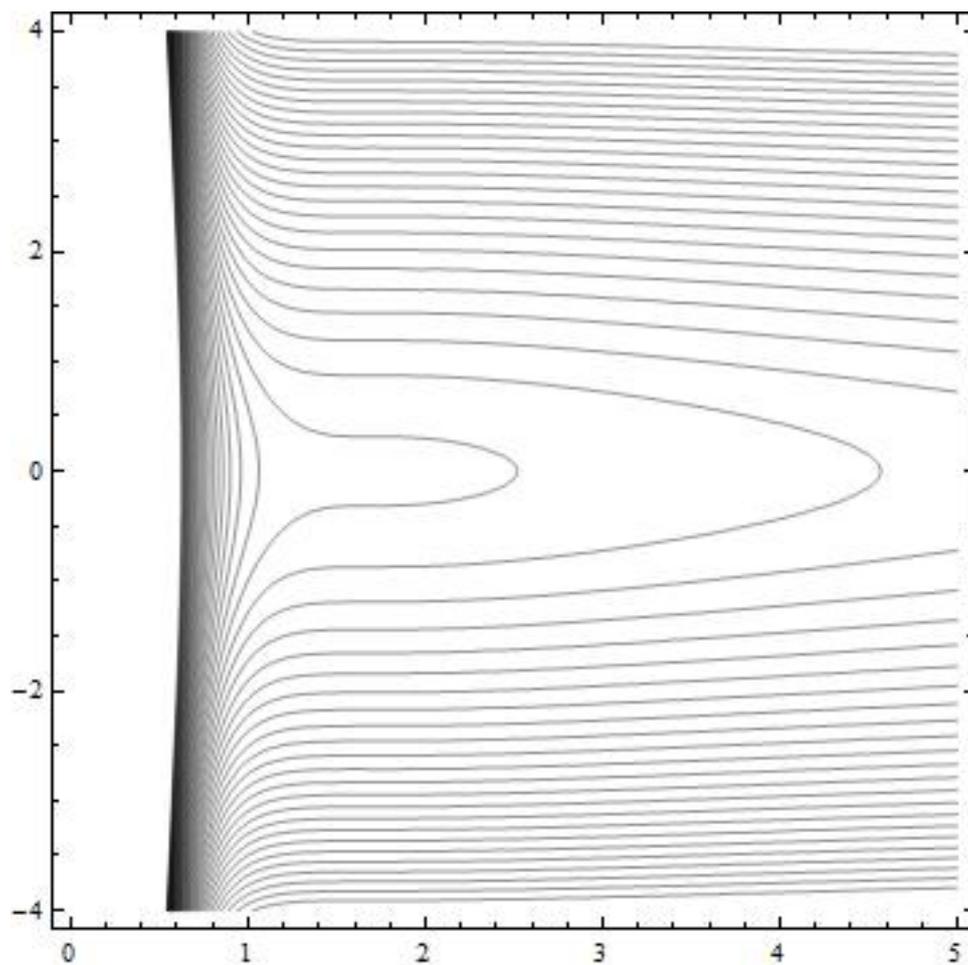


Figura 9: (es 3) Piano delle fasi per  $L^4 - 32\alpha = 0$

