**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012**

# FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato VII - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

<u>Esercizio 1.</u> Notiamo che la particella si muove liberamente fuori dalla sfera e non può penetrare in essa ($U = \infty$ per $r < a$). La traiettoria consiste perciò in due rette simmetriche rispetto al raggio $r_0$ passante per il punto in cui la particella colpisce la sfera. Chiamiamo $\phi_0$ l'angolo tra la retta passante per il centro e parallela alla direzione della particella prima dell'impatto e $r_0$. Notiamo che $\phi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \chi)$ dove $\chi$ è l'angolo di deviazione, e denotiamo con $b$ il parametro d'impatto, i.e. la distanza alla quale la particella passerebbe il centro se non ci fossero campi di forza. Abbiamo che

$$b = a \sin \phi_0 = a \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi) = a \cos \frac{1}{2}\chi$$

dunque da $\mathrm{d}\sigma = 2\pi b(\chi)|\mathrm{d}b(\chi)/\mathrm{d}\chi|\mathrm{d}\chi$ abbiamo che la sezione d'urto differenziale è

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin \chi \mathrm{d}\chi$$

Integrando $\mathrm{d}\sigma$ su tutti gli angoli troviamo che la sezione d'urto totale è $\sigma = \pi a^2$, in accordo col fatto che l'area su cui deve impattare la particella per essere deviata è semplicemente l'area della sezione trasversale della sfera.

<u>Esercizio 2.</u> In questo caso abbiamo che la traiettoria della particella è simmetrica rispetto alla retta passante per il centro e il punto più vicino dell'orbita. Se $\phi_0$ è l'angolo tra tale retta e un asintoto dell'orbita abbiamo che l'angolo di deviazione $\chi$ è dato da $\chi = |\pi - 2\phi_0|$ e che

$$\phi_0 = \int_{\rho_-}^{+\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$

con $b$ il parametro d'impatto, $v_\infty$ la velocità della particella all'infinito e $U$ l'energia potenziale. Sia $U(\rho) = \frac{\alpha}{\rho}$ con $\alpha = -k$, troviamo quindi

$$\phi_0 = \int_{\rho_-}^{+\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2\alpha}{m\rho v_\infty^2}}} = \int_{\rho_-}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4 b^2}\right) - \left(\frac{b}{\rho} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}\right)^2}} =$$

$$= \int_{r_-}^{\infty} \frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{m^2v_\infty^4 b^2 + \alpha^2}{m^2 v_\infty^4 b^2}\left(1 - \left[\left(\frac{b}{\rho} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}\right)\frac{mv_\infty^2 b}{\sqrt{m^2 v_\infty^4 b^2 + \alpha^2}}\right]^2\right)}} =$$

Dunque, ricordando che $\rho_-$ è uno zero del radicando, abbiamo

$$\phi_0 = \arccos\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}\frac{mv_\infty^2 b}{\sqrt{m^2v_\infty^4 b^2 + \alpha^2}}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 b}\right)^2}}\right)$$

da cui ricaviamo

$$b^2 = \left(\frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\right)\tan^2\phi_0 = \left(\frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\right)\cot^2\frac{1}{2}\chi$$

dove abbiamo usato $\phi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \chi)$. Sapendo che $\mathrm{d}\sigma = 2\pi b(\chi)|\mathrm{d}b(\chi)/\mathrm{d}\chi|\mathrm{d}\chi$ otteniamo

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \cos\frac{1}{2}\chi\mathrm{d}\chi}{\sin^3\frac{1}{2}\chi}$$

Notiamo che il risultato non dipende dal segno di $\alpha$, dunque è ugualmente valido per campi Coulombiani attrattivi e repulsivi.