Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato VIII - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Inizialmente abbiamo che, ponendo $O' = O$, il sistema mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ coincide col sistema fisso $k = Oxyz$. La rotazione del sistema K avviene attorno all'asse z ed è quindi data dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) & -\sin\alpha(t) & 0 \\ \sin\alpha(t) & \cos\alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha(t) = \omega t$ dato che la rotazione è costante con velocità angolare ω.
Visto che il punto materiale è vincolato a oscillare a distanza $l = 1$ da O' nel piano $\eta\zeta$ abbiamo che il vettore che individua il punto finale del pendolo nel sistema di riferimento K è

$$\mathbf{Q}(t) = (0, \sin\theta(t), -\cos\theta(t))$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione.
Le uniche forze che agiscono sul punto materiale sono la forza di gravità e la forza centrifuga, dunque

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{cf}}$$

dove $\mathbf{F_g} = (0, 0, -mg)$ è la forza di gravità diretta lungo l'asse ζ e $\mathbf{F_{cf}} = -m[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ è la forza centrifuga, con $\mathbf{\Omega}$ la velocità angolare nel sistema K. Dato che la velocità angolare nel sistema k è $\omega = (0, 0, \omega)$, da $\mathbf{\Omega} = B^{-1}\omega$, troviamo che $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \omega)$, e dunque

$$\mathbf{F}_{cf} = -m[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]] = -m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega\sin\theta(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \omega^2\sin\theta(t), 0)$$

Dalle ultime due componenti di $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{cf}}$ troviamo

$$\begin{cases} \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta = \omega^2\sin\theta \\ \ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta = -g \end{cases}$$

Dalla prima abbiamo $\dot{\theta}^2 = (\ddot{\theta}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)/\sin\theta$, e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta$$

che è l'equazione di Newton che descrive il moto del pendolo in termini della variabile θ.
Esercizio 2.

1. L'origine del sistema K si muove lungo la circonferenza di equazioni $x^2 + (y-1)^2 = 1$ quindi il vettore che individua O' sarà $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 1 - \cos t, 0)$ e perciò la traslazione C è data da $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}(t)$. La rotazione intorno all'asse ζ sarà data invece dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\theta(t) = \arctan(\frac{\dot{y}_{O'}(t)}{\dot{x}_{O'}(t)}) = t$

2. Innanzitutto notiamo che nel sistema K il moto di P è descritto da

$$\mathbf{Q}(t) = (0, \frac{1}{2}\sin\omega t, -\frac{1}{2}\cos\omega t)$$

Perciò la legge del moto nel sistema k sarà

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\sin\omega t\\ -\frac{1}{2}\cos\omega t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin t\\ 1-\cos t\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}\sin t(1-\frac{1}{2}\sin\omega t)\\ \cos t(\frac{1}{2}\sin\omega t - 1) + 1\\ -\frac{1}{2}\cos\omega t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notiamo subito che le componenti di $\mathbf{q}(t)$ verificano l'equazione $z^2 = \frac{1}{4} - (\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 1)^2$ e quindi il moto di P si svolge sul toro.

3. Abbiamo che la velocità assoluta $\mathbf{v}$ è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}(t) = \left(\cos t(1 - \frac{1}{2}\sin\omega t) - \frac{\omega}{2}\sin t\cos\omega t, -\sin t(\frac{1}{2}\sin\omega t - 1) + \frac{\omega}{2}\cos t\cos\omega t, \frac{\omega}{2}\sin\omega t\right).$$

4. La velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}(t) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\omega}{2}\cos\omega t\\ \frac{\omega}{2}\sin\omega t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\omega}{2}\sin t\cos\omega t\\ \frac{\omega}{2}\cos t\cos\omega t\\ \frac{\omega}{2}\sin\omega t\end{pmatrix}$$

5. La componente traslatoria della velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v_0} = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

6. La componente rotatoria della velocità di trascinamento sarà invece $\mathbf{v_T} = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$ dove $\omega = (0,0,1)$, quindi

$$\mathbf{v_T} = \begin{vmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z}\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2}\sin t\sin\omega t & \frac{1}{2}\cos t\sin\omega t & -\frac{1}{2}\cos\omega t\end{vmatrix} = (-\frac{1}{2}\cos t\sin\omega t, -\frac{1}{2}\sin t\sin\omega t, 0)$$

7. Calcoliamo infine la forza di Coriolis che è data da

$$\mathbf{F_{cor}} = -2\left[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}\right] = -2\begin{vmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{\omega}{2}\cos\omega t & \frac{\omega}{2}\sin\omega t\end{vmatrix} = 2\left(\frac{\omega}{2}\cos\omega t, 0, 0\right)$$

mentre la forza centrifuga sarà

$$F_{cent} = -\left[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]\right] = -\begin{vmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z}\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2}\sin\omega t & 0 & 0\end{vmatrix} = (0, \frac{1}{2}\sin\omega t, 0)$$

8. Dato che il moto è descritto da

$$\mathbf{q}(t) = (\sin t(1 - \frac{1}{2}\sin\omega t), \cos t(\frac{1}{2}\sin\omega t), -\frac{1}{2}\cos\omega t)$$

notiamo che il moto è periodico se $\frac{2\pi}{\omega}$ è razionale con 2π cioè se $\omega \in \mathbb{Q}$.

<u>Esercizio 3.</u> (3.1)Cerchiamo intanto la legge del moto d O'. Sappiamo che la componente lungo l'asse x è $x_{O'}(t) = \sin t$, quindi dato che O' si muove sulla circonferenza $x^2 + z^2 = 1$ avremo che

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, 1, \cos t)$$

Notiamo inoltre che abbiamo una rotazione intorno al secondo asse e l'angolo $\theta(t)$ di rotazione è dato da

$$\tan\theta(t) = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = -\tan t, \qquad \Rightarrow \theta(t) = -t$$

Dunque la trasformazione sarà data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

con

$$B = B^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & 0 & -\sin\theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta(t) & 0 & \cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

(3.2)Analizziamo ora il moto del punto P in K. Dato che il moto si svolge lungo l'asse ζ sotto l'azione di una forza elastica avremo che $\mathbf{Q}(t) = (0, 0, \zeta(t))$ con $\zeta(t)$ che verifica

$$\begin{cases} \ddot{\zeta} + \lambda\zeta = 0 \\ \zeta(0) = 0 \\ \dot{\zeta} = 1 \end{cases}$$

Dunque $\zeta(t) = a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t$, e imponendo le condizioni iniziali troviamo che $a = 0$ e $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Perciò

$$\mathbf{Q}(t) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{\lambda}t})$$

Da $\mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$ troviamo che il moto nel sistema k è dato da

$$\mathbf{q}(t) = (-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t + \sin t, 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t + \cos t)$$

(3.3)**velocità assoluta**. Derivando $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v} = (-\sin\theta(t)\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\lambda}}\cos\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t + \cos t, 0, \cos\theta(t)\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t - \sin t)$$

(3.4)**velocità relativa**Derivando il vettore che individua P in K troviamo $\dot{\mathbf{Q}} = (0, 0, \cos\sqrt{\lambda}t)$. Dunque la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta(t)\cos\sqrt{\lambda}t \\ 0 \\ \cos\theta(t)\cos\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix}$$

(3.5)**componente traslatoria**Da $\mathbf{v_O} = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo

$$\mathbf{v_O} = (\cos t, 0, -\sin t)$$

(3.6)**componente rotatoria**. Dato che la rotazione è intorno all'asse y di k, abbiamo che $\omega(t) = (0, \dot{\theta}, 0)$. Quindi

$$\mathbf{v_T} = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\lambda}}\cos\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t, 0, \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta(t)\sin\sqrt{\lambda}t)$$

(3.7)Abbiamo che $F_{cf} = -[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$, quindi dato che nel nostro caso $\mathbf{\Omega}(t) = \omega(t)$ avremo

$$F_{cf} = (0, 0, \dot{\theta}^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t)$$

Invece la forza di Coriolis è data da $F_{cor} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$, dunque abbiamo

$$F_{cor} = (-2\dot{\theta} \cos \sqrt{\lambda} t, 0, 0)$$