Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato IX - Roberto Feola (soluzioni degli esercizi)

Esercizio 1. Notiamo che il sistema è invariate per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e_3}$ passante per il centro dell'anello. Gli assi $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ sono ortogonali a $\mathbf{e_3}$ quindi per simmetria è sufficiente scegliere due assi ortogonali contenuti nel piano che contiene l'anello, dato che tale piano è ortogonale a $\mathbf{e_3}$. I momenti principali d'inerzia sono

$$I_1 = I_2 = \lambda \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\theta r^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} m r^2; \qquad I_3 = \lambda \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\theta r^2$$

con $\lambda = m/(2\pi r)$ la densità lineare.

Esercizio 2. Abbiamo la densità superficiale $\sigma = m/[\pi(b^2 - a^2)]$ dunque i momenti principali d'inerzia sono

$$I_1 = I_2 = \sigma \int_a^b \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\theta r^2 \sin^2\theta = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2); \qquad I_3 = \sigma \int_a^b \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r \mathrm{d}\theta r^2 = \frac{1}{2} m(a^2 + b^2)$$

Esercizio 3. Abbiamo densità di volume $\rho = m/(\pi r^2 h)$, utilizzando coordinate cilindriche troviamo che i momenti principale d'inerzia sono

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 =& \rho \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r' \mathrm{d}\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z (z^2 + (r')^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2) \\ I_3 =& \rho \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r' \mathrm{d}\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z (r')^2 = \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned}$$

Si nota che per $r \to 0$ troviamo $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} m h^2$ e $I_3 = 0$, che sono i momenti d'inerzia di un'asta lunghezza h e massa m, mentre per $h \to 0$ troviamo $I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m r^2$ e $I_3 = \frac{1}{2} m r^2$, che sono i momenti d'inerzia di un disco di raggio m e massa m.

Esercizio 4. Per trovare il centro di massa del sistema è sufficiente notare che il centro di massa della sola sbarra si trova a distanza $\frac{\ell}{2}$ dal punto A, dunque il centro di massa dell'intero sistema si trova a distanza $\frac{3}{4}\ell$ da A. Gli assi d'inerzia sono $\mathbf{e_1}$ che passa per la sbarra e due arbitrari $\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ ortogonali ad $\mathbf{e_1}$ passanti per il centro d'inerzia. Abbiamo quindi che $I_1 = 0$ mentre gli altri momenti d'inerzia sono

$$I_2 = I_3 = \frac{m}{\ell} \int_{-\frac{3}{4}\ell}^{\frac{1}{4}\ell} x^2 \mathrm{d}x + m \left(\frac{1}{4}\right)^2 \ell^2 = \frac{5}{24} m \ell^2$$

La condizione che le velocità devono verificare è

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{cm} + \omega \wedge \overline{OA}, \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{cm} + \omega \wedge \overline{OB}$$

e quindi

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \omega \wedge (\overline{OA} - \overline{OB})$$

cioè la differenza delle velocità deve stare su un piano ortogonale alla sbarra. Da questa formula si può ottenere anche ω a meno di una quantità ω' lungo la direzione della sbarra per le proprietà

del prodotto vettoriale.
Inoltre le velocità $\mathbf{v}_A = (0, -\frac{3}{4}\omega\ell, v)$ e $\mathbf{v}_B = (0, \frac{1}{4}\omega\ell, v)$ sono ammissibili dato che $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ è ortogonale al vettore $(-\ell, 0, 0)$. Sempre grazie alla formula precedente troviamo che la velocità angolare del corpo è $\omega = (0, 0, \omega)$ e quindi da $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{cm} + \omega \wedge \overline{OA}$ abbiamo anche che la velocità del centro di massa al tempo $t = 0$ è $\mathbf{v} = (0, 0, v)$. Se sul sistema agisce la forza di gravità abbiamo che il centro di massa è sottoposto ad un'accelerazione $-g$ lungo la terza componente, dunque il suo moto è quello di un sasso lanciato in aria con velocità iniziale v. Quindi $\mathbf{q}_{cm} = (0, 0, vt - g\frac{t^2}{2})$. Inoltre abbiamo un moto di rotazione intorno all'asse $\mathbf{e_3}$ con velocità angolare ω costante. Il moto di B nel sistema del laboratorio sarà dato da

$$\mathbf{q}_B = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ vt - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\ell\cos\omega t \\ \frac{1}{4}\ell\sin\omega t \\ vt - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$