

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**  
TUTORATO X - ROBERTO FEOLA (15-12-11)

ESERCIZIO 1. Si consideri un cono di raggio  $r$ , altezza  $h$  e densità di massa

$$\rho(z) = \frac{4m(h-z)}{\pi r^2 h^2}$$

dove  $z$  indica la distanza di un punto del cono dalla base.

- (1.1) Si verifichi che la massa totale del cono è  $m$ .
- (1.2) Si trovi l'asse di simmetria con l'ordine più elevato del sistema e si discutano le conseguenze riguardo alla posizione del centro di massa.
- (1.3) Si trovi la posizione del centro di massa.
- (1.4) Si trovino tre assi principali di inerzia rispetto al centro di massa e si calcolino i relativi momenti di inerzia.

ESERCIZIO 2. Data una molecola planare composta da tre atomi di massa identica  $m$  disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $\ell$ ,

- (2.1) Si trovi la posizione del centro di massa del sistema;
- (2.2) Si trovi l'asse di simmetria di ordine maggiore del sistema e si discutano le simmetrie dell'ellissoide di inerzia rispetto al centro di massa;
- (2.3) Si trovino tre assi principali di inerzia rispetto al centro di massa e si calcolino i relativi momenti di inerzia;
- (2.4) Si verifichi esplicitamente che il momento di inerzia rispetto a qualsiasi retta passante per il centro di massa e contenuta nel piano della molecola è lo stesso.

Sia dato un sistema di coordinate centrato nel baricentro del sistema, con la molecola sul piano  $xy$  al tempo  $t = 0$  e con l'asse  $y$  passante per la massa 1 (con le masse numerate in senso orario progressivo). Assumendo che le velocità iniziali della massa 1 e 2 siano

$$\mathbf{v}_1 = \left( u_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\ell, u_2, 0 \right), \quad \mathbf{v}_2 = \left( u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\omega\ell, u_2 + \frac{1}{2}\omega\ell, 0 \right), \quad (1)$$

- (2.5) Si trovi la velocità del centro di massa del sistema e la sua velocità angolare di rotazione rispetto al centro di massa;
- (2.6) Si studi il moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in assenza e in presenza di forza di gravità (si assuma che l'accelerazione di gravità è orientata lungo l'asse  $z$  con verso opposto a quello di  $z$ );
- (2.7) Si studi il moto nel sistema del laboratorio, in assenza e in presenza di forza di gravità.
- (2.8) Dopo aver verificato nei punti precedenti che il moto di rotazione attorno al baricentro corrispondente ai dati iniziali in Eq.(1) è stazionario (i.e., corrisponde a una rotazione costante per tutti i tempi), si trovino gli altri possibili dati iniziali  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  che generano rotazioni stazionarie.