

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012**  
**FM210 - Fisica Matematica 1**  
TUTORATO III - ROBERTO FEOLA (13-10-11)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 + y^2 - 1)(y + 1) + ((y + 1)^2 - x^2)(x^2 + 3y^2 - 1) \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases}$$

dove  $f(x, y)$  è una funzione  $C^\infty$ .

(1.1) Si determini che forma deve avere  $f(x, y)$  perchè la funzione

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 1)(y + 1 - x)(y + 1 + x)$$

sia una costante del moto.

(1.2) Determinare i punti di equilibrio.

(1.3) Si studi il sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + \alpha x^2) \\ \dot{y} = -y(1 + 3\alpha x^2) \end{cases}$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(2.1) Si trovi una costante del moto per il sistema.

(2.2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema al variare di  $\alpha$ .

(2.3) si studi il sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema meccanico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = 12x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(3.1) Si scelga l'energia potenziale corrispondente  $V(x)$  in modo tale che sia  $V(0) = 0$ .

(3.2) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato e cercare una costante del moto.

(3.3) Si studi il sistema linearizzato nell'intorno di eventuali punti di equilibrio.

(3.3) Si trovi esplicitamente la legge del moto in corrispondenza dei dati iniziali  $(x_0, y_0) = (\frac{3}{4}, 0)$ .

ESERCIZIO 4. Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} = x - \frac{1}{x^3}$$

(4.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.

(4.2) Determinare una costante del moto per il sistema.

(4.3) Determinare eventuali punti di equilibrio.

(4.4) Studiare il sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio.

(4.5) Studiare le curve di livello.

(4.6) Dire se esistono dati iniziali per cui la soluzione non è globalmente definita .