

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012
FM210 - Fisica Matematica 1
TUTORATO V - ROBERTO FEOLA (27-10-11)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$$

- (1.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato e cercare una costante del moto.
- (1.2) Determinare eventuali punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
- (1.3) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (1.4) Discutere il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
- (1.5) Determinare i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche. In particolare verificare che esiste una traiettoria periodica con energia meccanica $E = -\frac{3}{8}$. Scriverne il periodo come integrale definito e darne una stima.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico bidimensionale

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad U(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} - \frac{|\mathbf{x}|^4}{4}$$

dove $m, \gamma > 0$.

- (2.1) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
- (2.2) Si calcoli il sistema dinamico linearizzato attorno a $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e il corrispondente spettro degli autovalori. Cosa si può concludere sulla stabilità di $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$?

ESERCIZIO 3. Sia dato il seguente sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + 5y^4 + 6x^2y^2 - 16x^2 \\ \dot{y} = -4x^3y - 4xy^3 + 32xy \end{cases}$$

- (3.1) Determinare una funzione $H(x, y)$ che sia una costante del moto per il sistema.
- (3.2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.
- (3.4) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right)$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

- (4.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (4.2) Determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- (4.3) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (4.4) Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
- (4.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.