Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/2012

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato VIII - Roberto Feola (24-11-11)

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri il problema di un pendolo di massa $m = 1$ e lunghezza $l = 1$ vincolato a oscillare su un piano che ruota con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse passante per le posizioni di equilibrio del pendolo.
(1.1) Trovare l'equazione del moto per θ, dove θ è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione. (*Suggerimento*: può essere utile scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento mobile e quindi dedurre l'equazione per θ).
(1.2) Si riconduca l'equazione del moto ad un sistema dinamico planare e si determini una costante del moto.
(1.3) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
(1.4) Si studino le curve di livello e si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
(1.5)Si studi il caso in cui venga introdotta una forza resistiva $-\alpha\dot{\theta}$ con $\alpha > 0$. In particolare si determinino eventuali punti asintoticamente stabili e se ne stimi il bacino d'attrazione.

<u>Esercizio 2.</u>Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, la cui origine si muove in senso antiorario lungo la circonferenza di raggio 1 e centro $(0, 1)$ nel piano (x, y). L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z mentre l'asse ξ resta sempre tangente alla circonferenza nel punto O'. All'istante iniziale i due sistemi coincidono, e la componente lungo l'asse x del vettore che individua O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = \sin t$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K di moto circolare uniforme lungo la circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ nel piano (η, ζ) ruotando in senso antiorario con velocità angolare ω con $\eta(t) = \frac{1}{2}\sin\omega t$.
(2.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B.
(2.2)Dimostrare che il moto di P nel sistema k si svolge sul toro di equazioni $z^2 = \frac{1}{4} - (\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 1)^2$.
(2.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(2.4)Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(2.5)Determinare la componete traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.
(2.6)Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.
(2.7)Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.
(2.8)Discutere sotto quali condizioni il moto di P è periodico nel sistema k.

<u>Esercizio 3.</u> Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove sulla circonferenza di equazione $x^2 + z^2 = 1$ centrata nel punto $(0, 1, 0)$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x sia $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse η di K si mantiene parallelo all'asse y di k, mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla circonferenza. Un punto P di massa $m = 1$ si muove, partendo da O' con velocità iniziale uguale a 1, lungo l'asse ζ sotto l'azione di una forza elastica di costante $\lambda > 0$.
(3.1)Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B.
(3.2)Determinare il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto k e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K.
(3.3)Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.

(3.4)Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(3.5)Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.
(3.6)Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.
(3.7)Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.