

FM210 - FISICA MATEMATICA I

TUTORATO 9-1-2012

1. Due particelle di massa m e coordinate $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ si muovono sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $V(r)$:

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}}V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ m\ddot{\mathbf{y}} = -\partial_{\mathbf{y}}V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \end{cases}$$

con

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^4}$$

e $\alpha > 0$.

- Si esprima la soluzione alle equazioni del moto come una combinazione lineare del moto del centro di massa e del moto relativo.
- Si trovino gli integrali primi del moto del centro di massa e del moto relativo.
- Si analizzino qualitativamente il moto del centro di massa e il moto relativo.

Siano $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ le soluzioni alle equazioni del moto con condizioni "iniziali" (asintotiche nel passato)

$$\mathbf{x}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\simeq} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_0 t, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{x}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\simeq} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_0 t$ significa che $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^{-1} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}_0 t) = \bar{\mathbf{x}}$. Inoltre, $\mathbf{v}_0 = v_0(1, 0, 0)$ e $\bar{\mathbf{x}} = -b(0, 1, 0)$, con $v_0, b > 0$.

- Si determini il comportamento asintotico nel futuro di $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$.
2. Uno yo-yo è formato da un cilindro omogeneo di raggio R che può ruotare attorno al suo asse e si muove mantenendo il suo asse parallelo all'asse \hat{e}_1 di un riferimento fisso κ . In tale sistema di riferimento, il centro di massa G dello yo-yo si muove lungo l'asse \hat{e}_3 con legge oraria $\mathbf{r}_G(t) = h(0, 0, \cos \alpha t - 1)$, con $\alpha, h > 0$; al contempo, lo yo-yo ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega(t) = \sin(\alpha t/2)$ (con la convenzione che segni opposti di $\omega(t)$ corrispondono a versi di rotazione opposti dello yo-yo attorno all'asse). Una volta scelto un sistema di riferimento K solidale con lo yo-yo, si calcolino:
- la legge di trasformazione delle coordinate da κ a K ;
 - la legge di trasformazione delle velocità da κ a K ;
 - le forze fittizie presenti in K a causa del moto di K rispetto a κ , che agiscono su un punto materiale di massa m .

3. Un cubo omogeneo di lato a e massa m è fissato a uno dei suoi vertici. Il moto del cubo attorno a tale punto fisso è descritto dalla seconda equazione cardinale della dinamica in assenza di forze esterne.
- (a) Si scriva la matrice d'inerzia rispetto al punto fisso.
 - (b) Si calcolino i momenti e gli assi principali di inerzia.
 - (c) Si determinino i valori della velocità angolare corrispondenti a rotazioni stazionarie.
 - (d) Si scrivano le equazioni di Eulero per le componenti della velocità angolare in un sistema di riferimento solidale con il cubo.
 - (e) Si risolvano esplicitamente le equazioni di Eulero, al variare dei dati iniziali.
 - (f) Si calcoli il periodo della soluzione $\boldsymbol{\Omega}(t)$ alle equazioni di Eulero nel caso in cui il dato iniziale corrisponda a una rotazione di intensità $\omega_0 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ rad/s attorno a uno degli spigoli del cubo passanti per il punto fisso.