Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2011/12

FM210 - Fisica Matematica I

Soluzioni al tutorato del 9-1-2012

1. Due particelle di massa m e coordinate $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ si muovono sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $V(r)$:

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} V(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \\ m\ddot{\mathbf{y}} = -\partial_{\mathbf{y}} V(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \end{cases}$$

con

$$V(r) = \frac{\alpha}{r^4}$$

e $\alpha > 0$.

   (a) Si esprima la soluzione alle equazioni del moto come una combinazione lineare del moto del centro di massa e del moto relativo.
   (b) Si trovino gli integrali primi del moto del centro di massa e del moto relativo.
   (c) Si analizzino qualitativamente il moto del centro di massa e il moto relativo.

Siano $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ le soluzioni alle equazioni del moto con condizioni "iniziali" (asintotiche nel passato)

$$\mathbf{x}(t) \underset{t\to-\infty}{\simeq} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_0 t\ , \qquad \lim_{t\to-\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{x}(t) \underset{t\to-\infty}{\simeq} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_0 t$ significa che $\lim_{t\to-\infty} t^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0$ e $\lim_{t\to-\infty}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}_0 t) = \mathbf{b}$. Inoltre, $\mathbf{v}_0 = v_0(1,0,0)$ e $\bar{\mathbf{x}} = -b(0,1,0)$, con $v_0, b > 0$.

   (d) Si determini il comportamento asintotico nel futuro di $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$.

Soluzione.
(a) Siano: $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ le coordinate del centro di massa e della posizione relativa delle due particelle. Le equazioni per $\mathbf{R}$ e $\mathbf{r}$ sono disaccoppiate e hanno la forma:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}\ , \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -V'(\rho)\hat{\mathbf{r}}\ , \tag{1}$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\rho}$. La soluzione alle equazioni del moto originali, scritte in termini di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, può essere espressa in termini della soluzione alla Eq.(1) come segue:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(r) - \frac{\mathbf{r}(t)}{2}\ , \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}(r) + \frac{\mathbf{r}(t)}{2}\ ,$$

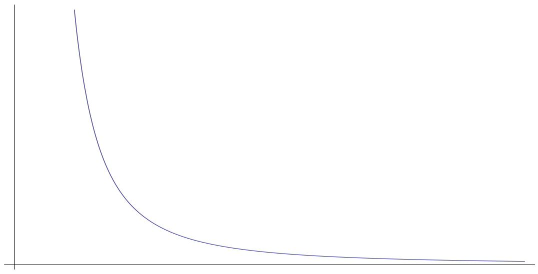

Figura 1: Grafico della funzione $V(r)$, $r \geq 0$.

(b) L'equazione per $(\mathbf{R}, \mathbf{V})$, con $\mathbf{V} := \dot{\mathbf{R}}$ ammette 5 integrali primi indipendenti: le tre componenti di $\mathbf{V}$ e le due componenti di $\mathbf{R} \wedge \mathbf{V}$ nel piano ortogonale a $\mathbf{V}$. L'equazione per $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, con $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ ammette 4 integrali primi indipendenti: le 3 componenti del momento angolare $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$, dove $\mu = \frac{m}{2}$ è la massa ridotta, e l'energia meccanica del moto relativo:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \ , \qquad V_{eff}(\rho) := \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + V(\rho) \ ,$$

dove $L = |\mathbf{L}|$.

(c) Il moto del centro di massa è un moto rettilineo uniforme della forma:

$$\mathbf{R}(r) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t \ ,$$

dove $\mathbf{R}_0 := \mathbf{R}(0)$ e $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(0)$ sono la posizione e la velocità del centro di massa all'istante iniziale.

Il moto della coordinata relativa si può studiare qualitativamente nel modo seguente. Se $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ allora il moto si svolge sulla retta che congiunge l'origine con $\mathbf{r}_0$. Chiamando ρ la coordinata su tale retta, il moto di ρ è quello di una massa puntiforme μ che si muove in 1D sotto l'effetto dell'energia potenziale $V(\rho)$.

In particolare, i valori ammessi dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V(\rho)$ sono $E > 0$, e per ogni scelta di $E > 0$, il moto è aperto (i.e., $\lim_{t\to\pm\infty} \rho(t) = +\infty$) e si svolge nella regione $\rho \geq \rho_- := (\alpha/E)^{1/4}$. Le traiettorie nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ sono descritte dall'equazione $\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{\alpha}{\rho^4})}$ e hanno la forma della Fig. 2.

Data $E > 0$, il moto è risolto per quadrature da:

$$t = \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{\alpha}{\rho^4})}}$$

dove $\rho_0 \geq \rho_-$ e il segno di fronte all'integrale va scelto in base al segno di $\dot{\rho}$, i.e., in base alla porzione di curva di livello (quella nel primo o nel quarto quadrante) su cui si sta muovendo il punto di coordinata ρ.

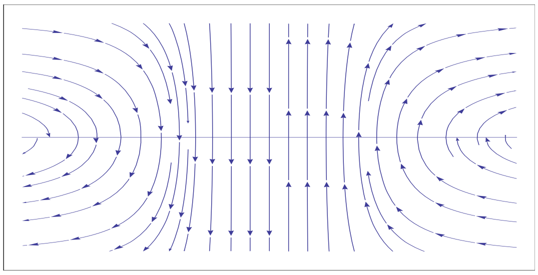

Figura 2: Orbite del moto radiale per $L = 0$ nel piano $(r, \dot{r})$ con $r \in \mathbb{R}$ coordinata lungo la retta su cui si svolge il moto.

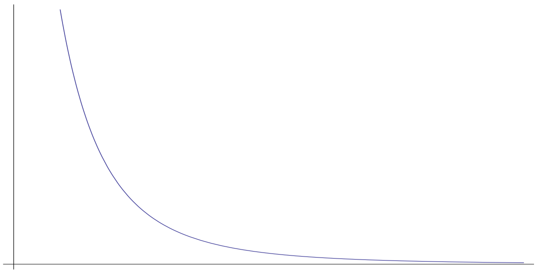

Figura 3: Grafico della funzione $V_{eff}(r)$, $r \geq 0$.

Se invece $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$, allora il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$. Scegliamo coordinate adattate a tale piano, in corrsipondenza delle quali $r_3 = 0$ e $L_3 = L = \mu\rho^2\dot{\theta} > 0$, dove (ρ, θ) sono le coordinate polari associate a (r_1, r_2); i.e., $r_1 = \rho\cos\theta$, $r_2 = \rho\sin\theta$. Il moto di $(\rho, \dot{\rho})$ è quello di una massa puntiforme μ che si muove in in 1D sotto l'effetto dell'energia potenziale $V_{eff}(\rho)$.

In particolare, i valori ammessi dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V(\rho)$ sono $E > 0$, e per ogni scelta di $E > 0$, il moto è aperto (i.e., $\lim_{t\to\pm\infty} \rho(t) = +\infty$) e si svolge nella regione

$$\rho \geq \rho_- := \sqrt{\frac{L^2}{4\mu E} + \sqrt{\frac{L^4}{16\mu^2 E^2} + \frac{\alpha}{E}}}$$

Le traiettorie nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ sono descritte dall'equazione $\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho^4})}$ e hanno la forma della Fig. 4.

Data $E > 0$, il moto è risolto per quadrature da:

$$t = \pm\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho^4})}}$$

dove $\rho_0 \geq \rho_-$ e il segno di fronte all'integrale va scelto in base al segno di $\dot{\rho}$, i.e., in base alla porzione di curva di livello (quella nel primo o nel

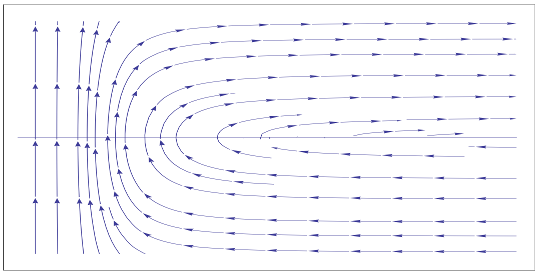

Figura 4: Orbite del moto radiale nel caso $L \neq 0$.

quarto quadrante) su cui si sta muovendo il punto di coordinata ρ. Una volta risolto per quadrature il moto di ρ, il moto della coordinata θ so ottiene per integrazione diretta da $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2}$.

(d) Con i dati "iniziali (asintotici nel passato) assegnati, il moto di $\mathbf{r}(t)$ si svolge sul piano 1-2, e quindi scriveremo ancora una volta $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, con $r_1(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$ e $r_2(t) = \rho(t)\sin\theta(t)$. La traiettoria descritta da $\mathbf{r}(t)$, che chiameremo $\mathcal{C}$, ha due asintoti: uno, orizzontale, della forma $r_2 = b$, come segue dal dato "iniziale $\mathbf{r}(t) \underset{t\to-\infty}{\simeq} (-v_0 t, b)$; uno, obliquo, della forma $r_2 = m x_1 + q$, con $m = \tan 2\bar{\varphi}$, $q = -\frac{b}{\cos 2\bar{\varphi}}$ e $2\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\theta}(t)\, dt$, che può essere calcolato dalle formule risolutive del moto:

$$\bar{\varphi} = \frac{L}{\mu} \int_{\rho_-}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho^4})}} \ ,$$

dove $E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$, $L = \mu v_0 b$ e $\rho_- = \sqrt{\frac{b^2}{2} + \sqrt{\frac{b^4}{4} + \frac{2\alpha}{\mu v_0^2}}}$. In termini di quest'angolo, il comportamento asintotico nel futuro richiesto è dato da

$$\mathbf{r}(t) \underset{t\to+\infty}{\simeq} (v_0 t \sin 2\bar{\varphi}, v_0 t \cos 2\bar{\varphi} - \frac{b}{\cos 2\bar{\varphi}})$$

2. Uno yo-yo è formato da un cilindro omogeneo di raggio R che può ruotare attorno al suo asse e si muove mantenendo il suo asse parallelo all'asse $\hat{e}_1$ di un riferimento fisso κ. In tale sistema di riferimento, il centro di massa G dello yo-yo si muove lungo l'asse $\hat{e}_3$ con legge oraria $\mathbf{r}_G(t) = h(0, 0, \cos\alpha t - 1)$, con $\alpha, h > 0$; al contempo, lo yo-yo ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega(t) = \sin(\alpha t/2)$ (con la convenzione che segni opposti di $\omega(t)$ corrispondono a versi di rotazione opposti dello yo-yo attorno all'asse). Una volta scelto un sistema di riferimento K solidale con lo yo-yo, si calcolino:

   (a) la legge di trasformazione delle coordinate da κ a K;

   (b) la legge di trasformazione delle velocità da κ a K;

   (c) le forze fittizie presenti in K a causa del moto di K rispetto a κ, che agiscono su un punto materiale di massa m.

Soluzione.
È naturale scegliere un sistema di riferimento solidale con lo yo-yo con origine centrata in $\mathbf{r}_G$, asse $\hat{\eta}_1$ coincidente con l'asse di rotazione $\hat{e}_1$ e con assi $\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ ottenuti ruotando rigidamente le coppia $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ attorno a $\hat{e}_1$ di un angolo $\theta(t) = \int_0^t \sin(\alpha t/2) = \frac{2}{\alpha}(1 - \cos(\alpha t/2))$. Scegliamo inoltre il sistema di riferimento fisso κ coincidente con K all'istante iniziale $t = 0$. Con queste scelte le leggi di trasformazioni richieste sono le seguenti.

(a) Legge di trasformazione delle coordinate da κ a K: $\mathbf{q} = B_t\mathbf{Q} + \mathbf{r}_G$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(\cos\alpha t - 1) \end{pmatrix}$$

con $\theta(t) = \frac{2}{\alpha}(1 - \cos(\frac{\alpha t}{2}))$.

(b) Definendo $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{V} := \dot{\mathbf{Q}}$, la legge di trasformazione delle velocità da κ a K ha la forma $\mathbf{v} = B_t(\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) + \mathbf{v}_G$, con $\mathbf{\Omega}(t) = (\omega(t), 0, 0) = (\sin(\frac{\alpha t}{2}), 0, 0)$ e $\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G = h\alpha(0, 0, -\sin\alpha t)$. In coordinate, questa legge di trasformazione prende la forma:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Q_3\sin(\frac{\alpha t}{2}) \\ Q_2\sin(\frac{\alpha t}{2}) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h\alpha\sin\alpha t \end{pmatrix}$$

(c) Le forze fittizie presenti in K a causa del moto di K rispetto a κ, scritte nelle coordinate di K, che agiscono su un punto materiale di massa m sono: $\mathbf{F} = -m\dot{\mathbf{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} - 2m\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V} - m\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) - m\mathbf{A}_G$, dove $\dot{\mathbf{\Omega}}(t) = \frac{\alpha}{2}(\cos(\frac{\alpha t}{2}), 0, 0)$ e $\mathbf{A}_G = B_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_G = -h\alpha^2(0, \sin\theta(t)\cos\alpha t, \cos\theta(t)\cos\alpha t)$.

In coordinate, queste forze prendono la forma

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} &= \frac{m\alpha}{2}\cos(\frac{\alpha t}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ Q_3 \\ -Q_2 \end{pmatrix} + 2m\sin(\frac{\alpha t}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ V_3 \\ -V_2 \end{pmatrix} + \\ &+ m\sin^2(\frac{\alpha t}{2})\begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + mh\alpha^2\cos\alpha t\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left[\frac{2}{\alpha}(1-\cos(\frac{\alpha t}{2}))\right] \\ \cos\left[\frac{2}{\alpha}(1-\cos(\frac{\alpha t}{2}))\right] \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Un cubo omogeneo di lato a e massa m è fissato a uno dei suoi vertici. Il moto del cubo attorno a tale punto fisso è descritto dalla seconda equazione cardinale della dinamica in assenza di forze esterne.

   (a) Si scriva la matrice d'inerzia rispetto al punto fisso.

   (b) Si calcolino i momenti e gli assi principali di inerzia.

   (c) Si determinino i valori della velocità angolare corrispondenti a rotazioni stazionarie.

   (d) Si scrivano le equazioni di Eulero per le componenti della velocità angolare in un sistema di riferimento solidale con il cubo.

   (e) Si risolvano esplicitamente le equazioni di Eulero, al variare dei dati iniziali.

   (f) Si calcoli il periodo della soluzione $\mathbf{\Omega}(t)$ alle equazioni di Eulero nel caso in cui il dato iniziale corrisponda a una rotazione di intensità $\omega_0 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ rad/s attorno a uno degli spigoli del cubo passanti per il punto fisso.

Soluzione.
(a) Sia $\rho = m/a^3$ la densità del cubo. Consideriamo un sistema di riferimento $\widetilde{K}$ solidale con il cubo con l'origine fissata nel punto fisso e gli assi orientati come i tre spigoli del cubo uscenti da $\mathbf{O}$ e con i versi scelti in modo tale che il cubo occupi una porzione del primo ottante di $\widetilde{K}$. In altre parole, il cubo occupa la regione di $\widetilde{K}$ definita da: $C := \{0 \leq \widetilde{Q}_1 \leq a, 0 \leq \widetilde{Q}_2 \leq a, 0 \leq \widetilde{Q}_3 \leq a, \}$, dove $\widetilde{\mathbf{Q}}$ sono le coordinate in $\widetilde{K}$.

Per definizione, la matrice d'inerzia nelle coordinate di $\widetilde{K}$ rispetto a $\mathbf{O}$ è:

$$\begin{aligned} I &= \rho \begin{pmatrix} \int_C (\widetilde{Q}_2^2 + \widetilde{Q}_3^2) d\widetilde{\mathbf{Q}} & -\int_C \widetilde{Q}_1 \widetilde{Q}_2 d\widetilde{\mathbf{Q}} & -\int_C \widetilde{Q}_1 \widetilde{Q}_3 d\widetilde{\mathbf{Q}} \\ -\int_C \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 d\widetilde{\mathbf{Q}} & \int_C (\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_3^2) d\widetilde{\mathbf{Q}} & -\int_C \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_3 d\widetilde{\mathbf{Q}} \\ -\int_C \widetilde{Q}_3 \widetilde{Q}_1 d\widetilde{\mathbf{Q}} & -\int_C \widetilde{Q}_3 \widetilde{Q}_2 d\widetilde{\mathbf{Q}} & \int_C (\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2) d\widetilde{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \\ &= ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Per simmetria, gli assi di inerzia sono la diagonale principale del cubo: $\hat{\eta}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e tutti gli assi ortogonali a $\hat{\eta}_1$; ad es, due scelte possibili degli assi $\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ sono: $\hat{\eta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $\hat{\eta}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. Un calcolo diretto mostra che tali assi sono in effetti invarianti sotto l'azione della matrice d'inerzia I e, piú precisamente:

$$I\hat{\eta}_1 = \frac{1}{6}\hat{\eta}_1 \ , \quad I\hat{\eta}_2 = \frac{11}{12}\hat{\eta}_2 \ , \quad I\hat{\eta}_3 = \frac{11}{12}\hat{\eta}_3 \ ,$$

il che mostra che i momenti principali di inerzia sono $I_1 = \frac{1}{6}$ e $I_2 = I_3 = \frac{11}{12}$. Chiamiamo K il sistema di riferimento solidale con il cubo, con origine nel punto fisso e assi coordinati coincidenti con $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$.

(c) Le rotazioni stazionarie corrispondono a vettori della velocità angolare orientati lungo gli assi principali di inerzia. Nelle coordinate di K, i dati iniziali per la velocità angolare corrispondenti a rotazioni stazionarie sono tutti e soli i vettori della forma $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, 0, 0)$ o $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_2, \Omega_3)$.

(d) Le equazioni di Eulero in K prenodono la forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\dot{\Omega}_1 = 0 \\ \frac{11}{12}\dot{\Omega}_2 = \frac{9}{12}\Omega_1\Omega_3 \\ \frac{11}{12}\dot{\Omega}_3 = -\frac{9}{12}\Omega_1\Omega_2 \end{cases}$$

(e) Le equazioni di Eulero implicano che: $\Omega_1(t) \equiv \Omega_1(0)$ e

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_2 = \frac{9}{11}\Omega_1(0)\Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = -\frac{9}{11}\Omega_1(0)\Omega_2 \end{cases}$$

Ponendo $z = \Omega_2 + i\Omega_3$ l'equazione precedente si riduce a: $\dot{z} = -i\frac{9}{11}\Omega_1(0)z$, che è risolta da $z(t) = e^{-i\frac{9}{11}\Omega_1(0)t}z(0)$, ovvero:

$$\Omega_2(t) = \mathrm{Re}\Big\{e^{-i\frac{9}{11}\Omega_1(0)t}(\Omega_2(0)+i\Omega_3(0))\Big\}\,, \qquad \Omega_3(t) = \mathrm{Im}\Big\{e^{-i\frac{9}{11}\Omega_1(0)t}(\Omega_2(0)+i\Omega_3(0))\Big\}\,.$$

(f) Siano $\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2, \widetilde{\eta}_3$ gli assi coordinati di $\widetilde{K}$, orientati come i tre spigoli del cubo uscenti dal punto fisso. Sappiamo che la matrice di cambiamento di base da K a $\widetilde{K}$ è data da:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\eta}_1 \\ \widetilde{\eta}_2 \\ \widetilde{\eta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{pmatrix}$$

Quindi, se la velocità angolare iniziale è della forma $\omega_0\widetilde{\eta}_j$, con $j \in \{1, 2, 3\}$, abbiamo che $\Omega_1(0) = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$, che implica che il periodo del moto corrispondente è $T = 2\pi\frac{11}{9\Omega_1(0)} = 44$ s.