

FM210 - FISICA MATEMATICA I

SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA PRE-ESONERO [09-01-2013]

ESERCIZIO 2

- (a) Osserviamo che il sistema è conservativo e il potenziale è centrale per cui si conservano sia l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(|\mathbf{x}|),$$

che il momento angolare

$$\mathbf{L} = m\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}.$$

- (b) Se $L \neq 0$, il moto radiale si svolge su $\rho > 0$ con potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{A}{\rho^\alpha} + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$

- i. Il comportamento della funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ dipende dai parametri α, m e dal valore di L e, in particolare, se $\alpha < 2$ oppure $\alpha = 2$ e $L^2 > 2mA$, il potenziale efficace tende a $+\infty$ all'origine, mentre se $\alpha = 2$ e $L^2 < 2mA$ oppure $\alpha > 2$, il potenziale efficace tende a $-\infty$ all'origine. C'è poi il caso speciale in cui $L^2 = 2mA$, che equivale ad una particella libera poiché $V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per ogni ρ . In tutti i casi menzionati sopra tuttavia $V_{\text{eff}}(\rho) \rightarrow 0$ per $\rho \rightarrow \infty$ ma, mentre nei casi $\alpha < 2$ o $\alpha = 2$ e $L^2 < 2mA$,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-,$$

negli altri casi, $\alpha = 2$ e $L^2 > 2mA$ oppure $\alpha > 2$,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^+.$$

È facile inoltre vedere che se $\alpha > 2$ esiste un massimo mentre se $\alpha < 2$ c'è un minimo.

I grafici dei potenziali efficaci nei vari casi sono riportati in fig. 1.

- ii. Per il disegno delle curve di livello si noti che, nel caso $\alpha = 2$ non ci sono punti di equilibrio e, se $L^2 < 2mA$, le orbite sono limitate ma non chiuse per $E < 0$ e aperte se $E > 0$, mentre nel caso $L^2 > 2mA$ tutte le orbite sono aperte ($E \geq 0$ in questo caso). Si osservi inoltre che nel primo caso $L^2 < 2mA$ le orbite limitate non esistono globalmente nel tempo in quanto la particella cade nel centro di forza in un tempo finito.

I casi $\alpha > 2$ e $\alpha < 2$ sono leggermente più complicati dalla presenza di un punto di equilibrio instabile nel primo caso e stabile nel secondo. Se $\alpha < 2$ le orbite sono limitate ma non chiuse (e nemmeno globali nel tempo) per $E < 0$ mentre per $E > 0$ sono costituite da due componenti connesse, l'una limitata, non chiusa né globale per $\rho < \rho_M$ con ρ_M punto di massimo di V_{eff} , e l'altra aperta per $\rho > \rho_0$. Se invece $\alpha > 2$ si hanno orbite aperte per $E \geq 0$ e orbite chiuse e periodiche per $E \leq 0$ (notare che in questo caso $E \geq V_m$ dove V_m è il minimo del potenziale efficace).

Il disegno delle orbite nei vari casi è riportato nelle fig. 2, 3, 4 e 5.

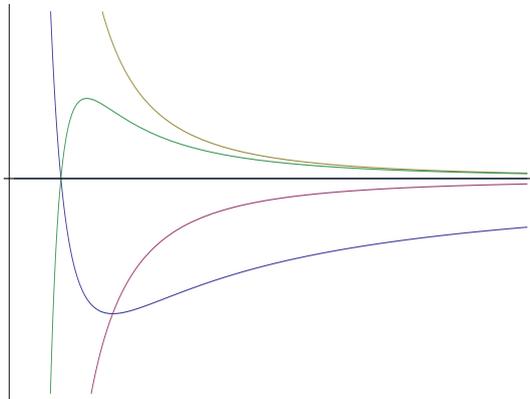


Figura 1: Grafico della funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$, $\rho \geq 0$, nei casi rispettivamente $\alpha < 2$ (blu), $\alpha = 2$ e $L^2 < 2mA$ (viola), $\alpha = 2$ e $L^2 > 2mA$ (giallo) e $\alpha > 2$ (verde).

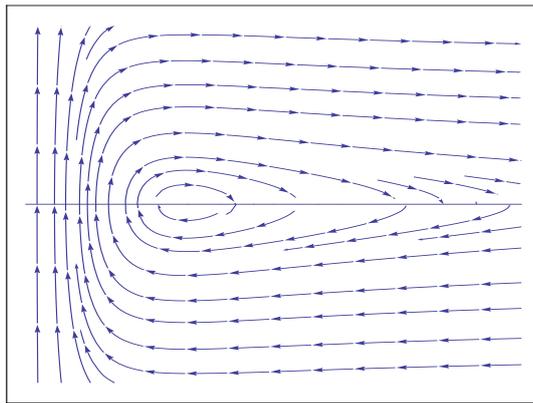


Figura 2: Orbite del moto radiale nel caso $\alpha < 2$.

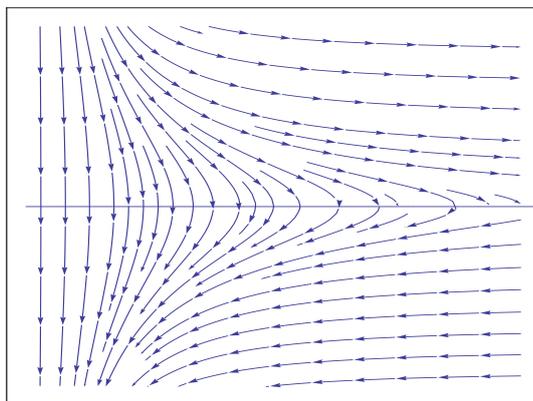


Figura 3: Orbite del moto radiale nel caso $\alpha = 2$ e $L^2 < 2mA$.

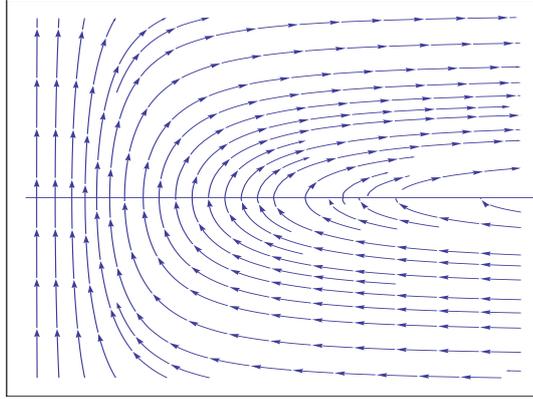


Figura 4: Orbite del moto radiale nel caso $\alpha = 2$ e $L^2 > 2mA$.

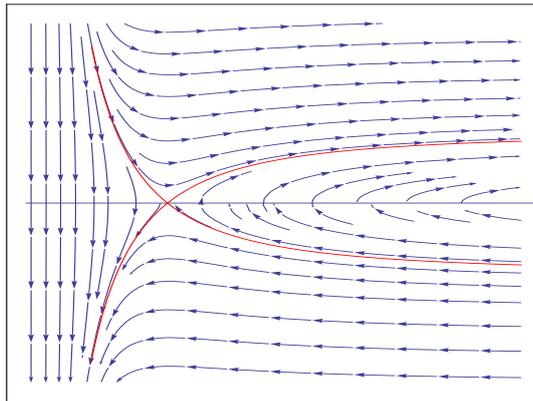


Figura 5: Orbite del moto radiale nel caso $\alpha > 2$ (in rosso le separatrici).

iii. I casi più semplici di moto complessivo periodico corrispondono a dati iniziali che coincidono con le posizioni di equilibrio nel caso $\alpha \neq 2$. Se infatti $E = V_M$, con V_M valore massimo del potenziale efficace, se $\alpha > 2$, oppure $E = V_m$, con V_m valore minimo del potenziale efficace, se $\alpha < 2$, il moto complessivo è periodico per ogni $L \neq 0$ e il periodo è

$$T(L) = \frac{2\pi m \rho_{M,m}^2}{L}.$$

D'altra parte se $\alpha < 2$ esistono orbite radiali periodiche per ogni $E < 0$ il cui periodo è

$$T(E) = 2 \int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}},$$

con $\rho_{\pm}(E)$ soluzioni di $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Tali valori dell'energia danno origine a orbite complessive periodiche se esistono due interi n_2, n_1 tali che sia soddisfatta la condizione

$$\int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} dr \frac{L}{\sqrt{\frac{m}{2}(E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{2\pi n_2}{n_1},$$

e in tal caso il periodo del moto complessivo è $n_1 T(E)$.

ESERCIZIO 2

Chiamiamo ℓ la lunghezza dei due lati uguali del triangolo isoscele; si noti che la base del triangolo è quindi $b = 2\ell \sin \frac{\pi}{12}$ e l'altezza è $h = \ell \cos \frac{\pi}{12}$. Sia inoltre M la massa totale della lamina. Scegliamo un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido con origine nel vertice O e asse $\hat{\eta}_3$ coincidente con l'asse del triangolo, tale che il triangolo appartenga al piano $\hat{\eta}_1 \hat{\eta}_3$ e gli altri due vertici del triangolo abbiano coordinate $(\frac{b}{2}, 0, -h)$ e $(-\frac{b}{2}, 0, -h)$. La regione occupata dal triangolo si può scrivere nella forma $T = \{(x, 0, z) : -h \leq z \leq 0, \frac{z}{m} \leq x \leq -\frac{z}{m}\}$, dove $m = \tan \frac{5}{12}\pi$.

1. Il centro di massa G del sistema ha coordinate

$$\mathbf{x}_G = (x_G, 0, z_G) = \frac{1}{\text{Area}} \int_T d\mathbf{x} \mathbf{x} = \frac{1}{\ell^2/4} \int_{-h}^0 dz \int_{z/m}^{-z/m} dx (x, 0, z)$$

Quindi $x_G = y_G = 0$ e

$$z_G = \frac{4}{\ell^2} \int_{-h}^0 dz \left(-2 \frac{z^2}{m} \right) = -\frac{8}{3} \frac{h^3}{m\ell^2} = -\frac{8\ell}{3} \sin \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $h = \ell \cos \frac{\pi}{12}$ e $m = \tan \frac{5\pi}{12} = \frac{\cos(\pi/12)}{\sin(\pi/12)}$

2. L'asse $\hat{\eta}_3$ è un asse di simmetria del corpo di ordine 2: quindi è un'asse di inerzia del corpo. Di conseguenza la matrice d'inerzia è automaticamente diagonale a blocchi rispetto alla componente 3:

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

dove $a_{12} = a_{21} = -\frac{M}{\text{Area}} \int_T d\mathbf{x} xy$ e tale integrale è ovviamente nullo, semplicemente perché la regione T consiste di punti le cui coordinate y sono identicamente nulle. Quindi nel sistema di riferimento scelto, la matrice d'inerzia è automaticamente diagonale e, di conseguenza, gli assi di inerzia del corpo coincidono con gli assi $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$.

3. Si ha:

$$I_1 = \frac{M}{Area} \int_T d\mathbf{x} z^2 = \frac{4M}{\ell^2} \int_{-h}^0 dz \int_{z/m}^{-z/m} dx z^2 = \frac{2Mh^4}{m\ell^2} = 2M\ell^2 \sin \frac{\pi}{12} \cos^3 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} M\ell^2 \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

$$I_3 = \frac{M}{Area} \int_T d\mathbf{x} x^2 = \frac{4M}{\ell^2} \int_{-h}^0 dz \int_{z/m}^{-z/m} dx x^2 = \frac{2Mh^4}{3m^3\ell^2} = \frac{2}{3} M\ell^2 \cos \frac{\pi}{12} \sin^3 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{6} M\ell^2 \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$I_2 = \frac{M}{Area} \int_T d\mathbf{x} (x^2 + z^2) = I_1 + I_3 = \frac{1}{6} M\ell^2 (3 \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{6} M\ell^2 (2 + \cos \frac{\pi}{6}) = \frac{4 + \sqrt{3}}{12} M\ell^2$$

4. In assenza di forze esterne, le rotazioni stazionarie corrispondono a rotazioni con vettore di velocità angolare costante e orientato lungo gli assi principali di inerzia.
5. Sia \hat{e}_3 il versore verticale, orientato verso l'alto. Come mostrato a lezione, il momento della forza gravitazionale (a priori distribuita uniformemente su tutta la lamina) è uguale al momento della forza $-Mg\hat{e}_3$ applicata al centro di massa, ovvero $-Mg\overrightarrow{OG} \wedge \hat{e}_3$. Il corpo è in equilibrio se e solo se è fermo, con il momento delle forze esterne uguale a zero. Nel nostro caso, affinché il momento delle forze sia nullo, è necessario e sufficiente che \overrightarrow{OG} sia orientato lungo la verticale, o verso il basso o verso l'alto. Le posizioni di equilibrio del sistema corrispondono quindi a configurazioni del corpo fermo, con il suo asse di simmetria in direzione verticale.

ESERCIZIO 3

Supponiamo che sia ω_0 che Ω_1 siano rivolti verso l'alto, i.e., sia la piattaforma rispetto al terreno che le tazzine rispetto alla piattaforma ruotano in senso antiorario. Fissiamo il sistema di riferimento fisso κ con l'origine O_κ nel centro della piattaforma e l'asse \hat{z} diretto lungo la verticale e gli assi \hat{x} e \hat{y} diretti in modo che al tempo $t = 0$ il centro della tazzina in questione si trovi sull'asse \hat{x} . Il sistema di riferimento K solidale con la tazzina lo prendiamo con origine O_K coincidente con il centro della tazzina, asse $\hat{\eta}_3$ diretto lungo l'asse della tazzina, asse $\hat{\eta}_1$ coincidente al tempo $t = 0$ con l'asse \hat{x} del sistema fisso e asse $\hat{\eta}_2$ scelto coerentemente. Se chiamiamo $\mathbf{r}(t)$ la posizione di O_K in κ si avrà dunque (indichiamo con ω_0 e Ω_1 i moduli di ω_0 e Ω_1)

$$\mathbf{r}(t) = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti inoltre che l'asse $\hat{\eta}_1$ forma un angolo $\Omega_1 t$ con l'asse $\hat{\mathbf{r}}$, e quindi forma un angolo $(\omega_0 + \Omega_1)t$ con l'asse \hat{x} .

- i. La legge di trasformazione delle coordinate è dunque (chiamando \mathbf{q} le coordinate in κ e \mathbf{Q} quelle in K)

$$\mathbf{q}(t) = B_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t),$$

con

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \Omega_1 t) & -\sin(\omega_0 t + \Omega_1 t) & 0 \\ \sin(\omega_0 t + \Omega_1 t) & \cos(\omega_0 t + \Omega_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ii. La legge di trasformazione delle velocità è conseguentemente

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = B_t [\dot{\mathbf{Q}}(t) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{q}(t)] + \dot{\mathbf{r}}(t),$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 + \Omega_1 = (\omega_0 + \Omega_1)\hat{\eta}_3$ e $\dot{\mathbf{r}}(t) = \omega_0 \wedge \mathbf{r}(t)$.

iii. La legge di trasformazione delle accelerazioni è dunque

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = B_t \left[\ddot{\mathbf{Q}}(t) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}(t) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t) \right] + \ddot{\mathbf{r}}(t),$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{r}(t))$.

iv. Le forze fittizie che agiscono sulla massa m in K sono la forza centrifuga $-m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}(t)$, la forza di Coriolis $-2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}(t)$ e la forza inerziale di traslazione $-mB_t^{-1}\ddot{\mathbf{r}}(t) = -m\boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{R}(t))$, dove

$$\mathbf{R}(t) = R_0 \begin{pmatrix} \cos \Omega_1 t \\ -\sin \Omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

v. Supponiamo senza perdita di generalità che il punto di sospensione del pendolo coincida con l'origine del sistema di riferimento K . Un'eventuale posizione di equilibrio del pendolo \mathbf{Q}_0 ha la forma: $\mathbf{Q}_0 = \ell(\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, -\cos \theta_0)$, dove θ_0 è l'angolo formato con la verticale e ϕ_0 l'angolo formato dalla proiezione del filo del pendolo sul piano $\hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2$ con $\hat{\eta}_1$ stesso. Affinché \mathbf{Q}_0 sia un equilibrio, la risultante delle forze esterne con il pendolo fermo deve essere nulla. Tale condizione assume la forma:

$$\mathbf{T} - mg\hat{\eta}_3 - m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}_0 - m\boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{R}(t)) = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{T} = -T(\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, -\cos \theta_0)$ è la tensione del filo. Proiettiamo tale equazione nella direzione $\hat{e}_\tau = (-\sin \phi_0, \cos \phi_0, 0)$, ortogonale sia a \mathbf{T} che alla forza centrifuga $-m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}_0$, moltiplicando scalarmente ambo i membri per \hat{e}_τ . Troviamo così:

$$\hat{e}_\tau \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{R}(t))] = 0 \quad (1)$$

Si noti che

$$-\boldsymbol{\omega}_0 \wedge (\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{R}(t)) = \omega_0^2 R_0 \begin{pmatrix} \cos(\Omega_1 t + \phi_0) \\ -\sin(\Omega_1 t + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché l'equazione (1) diventa:

$$-\sin \phi_0 \cos(\Omega_1 t + \phi_0) + \cos \phi_0 \sin(\Omega_1 t + \phi_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \Omega_1 t = 0,$$

che è palesemente impossibile: la condizione è violata per ogni $t \neq k\pi/\Omega_1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo raggiunto un assurdo: questo vuol dire che non esistono posizioni di equilibrio del pendolo.